PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES
DES CLASSES PRÉPARATOIRES AUX GRANDES ÉCOLES

Objectifs de formation et organisation du programme de TSI

Objectifs de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Technologie et Sciences Industrielles (TSI) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale d'un futur ingénieur, enseignant ou chercheur. Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, les sciences industrielles et l'informatique, sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une organisation coordonnée entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés complets des théorèmes figurant au programme ainsi que les démonstrations exigibles et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes.

Il est attendu que la pratique du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concoure à la formation de l'esprit des étudiants : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques. . .) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

Les étudiants doivent aussi être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les étudiants des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche, de favoriser la mise en avant des concepts mathématiques sous-jacents et de mettre l'accent sur l'interprétation des résultats obtenus ; il favorise ainsi l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles.

Recommandations

Ce programme propose des activités dont les unes mettent en œvre des techniques classiques et bien délimitées qui doivent être maîtrisées par les étudiants, les autres visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée, et avec lesquelles les étudiants doivent acquérir une certaine familiarité. Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main de ces techniques classiques dont la maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices et à des problèmes que les étudiants doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les interactions entre les différentes parties du programme sont fortes et mériteront d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique.

Les développements formels ou trop abstraits doivent être évités ; une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements de physique, de chimie, des sciences industrielles et d'informatique, tout en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique.

L'évolution des matériels et logiciels conduit à renforcer la partie réservée à l'algorithmique. En effet, ces moyens de calcul permettent aux mathématiques de disposer d'un lien vivant à l'expérimentation. Ainsi, on présentera de préférence, lorsque cela est possible, des méthodes constructives accompagnées de la description d'un algorithme plutôt que des démonstrations d'existence ou de convergence démunies de procédé de construction. La présentation des algorithmes s'entend sur deux niveaux. D'une part, ils peuvent être présentés sous une forme logique abrégée, sans référence obligatoire à un langage informatique particulier ; d'autre part, ils sont destinés à être mis en œuvre sur machine à l'occasion des heures passées en salle d'informatique sous forme de travaux pratiques de mathématiques.

Il est aussi souhaité que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

Organisation du texte du programme

Le programme de deuxième année TSI est organisé en quatre parties (numérotées I, II, III et IV) ; chaque partie comporte :

- en tête de partie, un bandeau définissant les objectifs essentiels et décrivant sommairement les notions qui y sont étudiées ; il fixe également les méthodes et les techniques que les étudiants doivent maîtriser et savoir mettre en œuvre ;
- un contenu, organisé en sections (numérotées 1, 2, ...), fixant les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- des commentaires donnant des informations sur les acquis des étudiants, indiquant des repères et quelques notations, et précisant le sens ou les limites à donner à certaines notions ; lorsque c'est jugé utile, et dans un souci d'unification des pratiques des enseignants, les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats y sont précisés.

Étalement de la formation

La partie I du programme de deuxième année TSI est étudiée complètement en premier lieux et s'il est jugé nécessaire, en parallèle avec des sections de la partie II. Le reste du programme de deuxième année TSI est ensuite étudié en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse et de géométrie différentielle d'une part et d'algèbre linéaire et de géométrie euclidienne de l'autre.

Avertissement

Les quatre parties de ce programme sont organisées en sections suivant un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions au programme de mathématiques dans la filière TSI et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours. Chaque professeur est libre d'adopter la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe ; en revanche, le respect des objectifs de formation et son étalement dans l'année comme indiqués ci-dessus est une nécessité incontournable.

Programme de la classe de deuxième année TSI

I - Fonctions d'une variable réelle - Calcul différentiel

Objectifs

L'objectif de cette partie est

- *d'étudier les concepts de normes et de distances associées, ainsi que quelques notions élémentaires de topologie de $\mathbb{R}^d$,*
- *d'étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes, et d'étendre ces notions pour des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$,*
- *d'introduire la notion de fonctions continues par morceaux intégrables sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes,*
- *d'étendre les notions de base du calcul différentiel aux applications continûment différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$,*
- *d'aboutir à une bonne maîtrise de quelques problèmes usuels à partir d'un minimum d'outils théoriques.*

Il est attendu qu'à l'issu de cette partie, les étudiants

- *sachent étudier la continuité et la dérivabilité de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,*
- *puissent établir la convergence ou la divergence d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une fonction positive aux fonctions de référence,*
- *connaissent les techniques usuelles d'intégration,*
- *sachent vérifier si une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$, en calculer les dérivées partielles et en déterminer les extrémums locaux si elle en présente,*
- *aient appris à résoudre, sur des exemples simples, des équations aux dérivées partielles d'ordre un et deux.*

Contenu

1. Notions élémentaires de topologie de $\mathbb{R}^d$

- Définition d'une norme sur $\mathbb{R}^d$, distance associée. Les normes usuelles et leurs relations de comparaison. Boules, parties bornées.
- Limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$; caractérisation à l'aide des suites coordonnées ; opérations algébriques sur les limites ; toute suite convergente est bornée.
- Parties ouvertes, parties fermées ; point adhérent, caractérisation séquentielle d'un fermé.

2. Limite et continuité des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

- Espace vectoriel des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Fonctions bornées.
- Continuité d'une application en un point. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées. Opérations algébriques ; continuité d'une application composée.
  L'image d'un segment par une fonction continue est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^d$ (*résultat admis*).

3. Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

Les fonctions étudiées dans cette section sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

- Dérivabilité en un point, dérivabilité à droite, à gauche. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
- Définition d'une application n fois dérivable sur un intervalle ($n \in \mathbb{N}^*$), d'une application de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) sur un intervalle ; espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^d)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^d$.
- Développement limité à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ au voisinage d'un point ; unicité, opérations sur les développements limités. Existence d'un développement limité à l'ordre k pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$: formule de Taylor-Young.
- Formule de Leibniz : dérivée k-ième du produit d'une fonction à valeurs vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$ par une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^k$; cas d'un produit scalaire et d'un produit vectoriel de deux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$.

4. Intégration des fonctions continue par morceaux sur un intervalle quelconque

- Rappel de la définition d'une fonction continue par morceaux, à valeurs réelles ou complexes, définie sur un segment; définition d'une fonction continue par morceaux, à valeurs réelles ou complexes, définie sur un intervalle quelconque.
  Opérations sur les fonctions continues par morceaux.
- Rappels concernant l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes. Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne. Définition d'une primitive d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.
- Définition d'une intégrale impropre (ou généralisée) convergente. Intégrale divergente.
- Intégrale absolument convergente, fonction intégrable (ou sommable) sur un intervalle. Une intégrale absolument convergente est convergente (*résultat admis*). Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne.
- Principe de comparaison pour les fonctions positives. Étude de l'intégrabilité sur $]0,1]$ ou sur $[1,+\infty[$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $x \mapsto x^p$ $(p \in \mathbb{R})$, $x \mapsto |\ln x|$.
- Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque. Techniques d'intégration par parties.
- Exemples d'intégrales semi-convergentes.

5. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

- Espace vectoriel des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Fonctions bornées. Limite et continuité d'une fonction en un point. Opérations algébriques sur les fonctions continues. Continuité d'une fonction composée.
- L'image d'une partie fermée bornée par une fonction continue est fermée bornée (*résultat admis*).

6. Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

- Dérivées partielles premières; définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Développement limité à l'ordre un d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; différentielle en un point, matrice jacobienne, jacobien.
- Si f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, leur composée $g \circ f$ l'est aussi; matrice jacobienne de $g \circ f$. Application au calcul de la dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U. Matrice jacobienne d'une application réciproque de classe $\mathcal{C}^1$.
- Dérivées partielles d'ordre k $(k \geq 2)$. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 2)$. Théorème de Schwarz (*admis*).
- Équations aux dérivées partielles : étude sur des exemples simples d'équations aux dérivées partielles d'ordre un ou deux.
- Point critique (ou stationnaire) d'une application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles; extrémums; condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
  Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (*résultat admis*) ; application à l'étude des extrémums locaux.
- Gradient, divergence, rotationnel et laplacien; expression en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques $(n = 2$ ou $3)$.
- Théorème des fonctions implicites pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs réelles (*admis*).

Commentaires

1. Notions élémentaires de topologie de $\mathbb{R}^d$

Les applications suivantes, définies pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, par $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$, $||x||_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ et $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}$ sont les normes usuelles de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

Dans la suite de cette section, on utilise la norme euclidienne usuelle $||.||_2$.

2. Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

Dans la pratique, on utilisera les fonctions coordonnées pour l'étude des limites et de la continuité d'une fonction.

3. Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

Dans la pratique, on utilisera les fonctions coordonnées pour l'étude de la dérivabilité d'une fonction.

La fonction dérivée d'une fonction f se note f' ou Df ou $\dfrac{df}{dx}$, sa dérivée k-ième se note $f^{(k)}$ ou $D^k f$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

On donnera l'interprétation cinématique et graphique de la dérivée en un point ainsi que les expressions des dérivées des fonctions $t \longmapsto (f(t)|g(t))$ et $t \longmapsto \|f(t)\|^2$ où $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$ et $\|\ \|$ la norme associée, f et g étant des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (on se limitera aux cas $d \leqslant 3$).

Formules de Leibniz :
- Dérivée k-ième de $t \mapsto \lambda(t).v(t)$, où $\lambda \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^d)$.
- Produit scalaire : pour $d = 2$ ou 3, dérivée k-ième de $t \mapsto (u(t)|v(t))$, où $u,\ v \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^d)$.
- Produit vectoriel : pour $d = 3$ et $\mathbb{R}^d$ euclidien orienté, dérivée k-ième de $t \mapsto u(t) \wedge v(t)$, où $u,\ v \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^d)$.

4. Intégration des fonctions continue par morceaux sur un intervalle quelconque

Pour ce qui concerne les intégrales impropres, l'objectif du programme est la maîtrise de la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle non fermé ou non borné, en vue de la définition de l'intégration sur un intervalle quelconque. Le programme part de la définition générale de la convergence, en raison de la simplicité de la présentation, mais l'étude générale de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.

Une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_o = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Une fonction définie sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction continue par morceaux ; on appelle primitive de f sur I toute fonction continue $F : I \to \mathbb{K}$ telle qu'en tout point de continuité x de f, F soit dérivable de dérivée égale à $f(x)$; si c est un point de I, toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto C + \int_c^x f$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Soit I un intervalle dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement, $f : I \to \mathbb{K}$, une fonction continue par morceaux et F une primitive de f sur I ; on dit que f admet une intégrale impropre convergente sur I si F admet des limites en a et en b, auquel cas on pose $\int_a^b f = \lim\limits_b F - \lim\limits_a F$; si par exemple $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$, f admet une intégrale impropre convergente sur I si, et seulement si, la limite $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f$ existe, auquel cas cette limite est la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$.

Si la fonction f est à valeurs réelles positives, elle admet une intégrale convergente si, et seulement si, l'ensemble des intégrales de f sur un segment contenu dans I est majoré, auquel cas la borne supérieure de cet ensemble est égale à l'intégrale $\int_a^b f$. Dans le cas où f est à valeurs positives et où elle n'admet pas d'intégrale impropre convergente sur I, il est pratique d'écrire $\int_a^b f = +\infty$.

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ admet une intégrale absolument convergente sur I ou encore que f est sommable ou intégrable sur I si $\int_I |f| < +\infty$; dans ce cas, f admet une intégrale convergente sur I, qu'on note $\int_a^b f$ ou $\int_I f$. Inégalité triangulaire : si f est intégrable sur I, on a $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

On souligne l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction à l'estimation de son comportement aux bornes de l'intervalle d'intégration.

On considère sur quelques exemples l'utilisation des techniques d'intégration (changement de variable, intégration par partie) pour l'étude et/ou le calcul d'intégrales impropres et on soulignera l'intérêt de la formule d'intégration par parties pour ramener l'étude d'une intégrale semi-convergente à celle d'une intégrale absolument convergente.

Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque : étant données une fonction f ayant une intégrable absolument convergente sur I et une bijection φ d'un intervalle J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, $\int_I f = \int_J (f \circ \varphi).|\varphi'|$.

5. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Pour l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ on se limitera aux cas $n \leq 3$ et $p \leq 3$.

On montrera, sur un exemple simple, que la continuité des applications partielles n'implique pas la continuité.

6. Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

La notion d'application différentiable est hors programme. Les dérivées partielles de f au point a sont notées $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. Caractérisation d'une application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ par ses composantes f_i ; les fonctions $\mathrm{D}_j f_i$ sont les composantes de $\mathrm{D}_j f$.

On utilisera la notion différentielle : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Dérivées partielles d'une fonction de la forme $(x, y) \longmapsto g(u(x, y), v(x, y))$ où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ telles que, pour tout $(x, y) \in \Omega$, $\big(u(x, y), v(x, y)\big) \in U$; expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles f de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles de la fonction $F : (\rho, \theta) \longmapsto F(\rho, \theta) = f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$.

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

Pour l'étude d'exemples simples d'équations aux dérivées partielles, on exploitera en particulier les techniques de changements de variables.

Le théorème des fonctions implicites peut être traité au moment de l'études des courbes et surfaces définies implicitement prévue dans la section 3 (géométrie différentielle) de la partie IV.

II - Algèbre linéaire - Géométrie euclidienne

Objectifs

Cette partie met en œuvre, consolide et complète les acquis de la classe de la première année TSI sur les espaces vectoriels, les applications linéaires, le calcul matriciel et la résolution des systèmes linéaires ; elle vise l'étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire, en particulier l'outil essentiel de la réduction des endomorphismes, et de la géométrie euclidienne. Les résultats obtenues seront exploités pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants
- *sachent représenter matriciellement une famille finie de vecteurs et une application linéaire dans une base donnée, et utiliser les formules de changement de bases,*
- *soient capable, au moyen de l'algorithme de Gauss, de résoudre un système d'équations linéaires, de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs, de compléter une famille libre en une base, d'inverser une matrice carrée ;*
- *aient compris le théorème du rang ;*
- *aient pratiqué des méthodes de calcul du déterminant d'une matrice carrée et en aient compris les propriétés,*
- *soient capables de déterminer les éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme en dimension finie, et dans certains cas en dimension infinie,*
- *puissent diagonaliser et (dans certains cas) trigonaliser les matrices réelles et complexes,*
- *maîtrisent le passage entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel,*
- *sachent orthogonaliser une famille libre d'un espace euclidien au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt,*
- *aient fait le lien entre isométries affines et automorphismes orthogonaux.*

Contenu

Dans cette partie, le corps des scalaires, noté $\mathbb{K}$, *est égal à* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1. Rappels et compléments sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

- Définition d'une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E, indexée par un ensemble I. Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base de E ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base ; base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
- Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels de E ; famille finie de sous-espaces vectoriels en somme directe ; sous-espaces vectoriels supplémentaires ; caractérisation par la dimension d'une somme directe finie de sous-espaces vectoriels de dimension finie.

- Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace ; relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$; deux matrices carrées semblables ont la même trace. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Équation linéaire $f(x) = b$, où f est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F (de dimensions quelconques), et b un élément de F ; équation linéaire homogène associée ; condition de compatibilité ; structure de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = b$. Principe de superposition.
- Résolution d'un système de n équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ à p inconnues par la méthode d'élimination de Gauss (ou méthode du pivot).
- Opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice, matrices élémentaires ; matrice échelonnée ; interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels. Formulation matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice échelonnée réduite E uniquement déterminée et une suite finie de matrices élémentaires $P_1, \ldots, P_N$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $E = P_N \cdots P_1 M$.
  Application à la détermination du rang d'une matrice et au calcul de l'inverse d'une matrice carrée.
- Valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension quelconque, sous-espaces propres, vecteurs propres. Éléments propres d'une homothétie, d'une projection, d'une symétrie. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

2. Déterminants

- Toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est produit d'un nombre fini de matrices élémentaires (de transvection et de dilatation).
- Existence et caractérisation du déterminant det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$; développement de Laplace suivant une ligne ou une colonne. Multiplicativité du déterminant, invariance par transposition des matrices, par similitude. Caractérisation des matrices inversibles.
- Déterminant d'une matrice triangulaire, triangulaire par blocs. Déterminant de Vandermonde.
- Matrice complémentaire $\widetilde{M}$ d'une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; formule $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = (\det M)I_n$. Formules de Cramer.
- Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, c'est une forme n-linéaire alternée ; déterminant d'un endomorphisme ; interprétation géométrique. Caractérisation des bases, des automorphismes.
- Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

3. Réduction des endomorphismes en dimension finie

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$.

- Polynôme caractéristique χ_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude ; polynôme caractéristique χ_u d'un endomorphisme u de E.
- Les valeurs propres de u sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_u de u ; multiplicité d'une valeur propre λ de u ; si le polynôme caractéristique χ_u est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité sont égaux à la trace et au déterminant de u respectivement ; le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de λ.
- Endomorphisme diagonalisable, matrice carrée diagonalisable. Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité : la somme des sous-espaces propres de u est égale à E ; la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à n ; le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de tout sous-espace propre de u est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.
  Tout endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes deux à deux est diagonalisable.
- Endomorphisme trigonalisable, matrice carrée trigonalisable. Un endomorphisme u de E est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (*résultat admis*). Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ est semblable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à une matrice triangulaire supérieure ; en particulier, toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Application à l'étude sur des exemples du comportement des puissances n-ième d'une matrice.
- Application à l'étude des suites numériques satisfaisant à des relations de récurrence linéaire à coefficients constants.

4. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Dans cette section, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

- Espaces préhilbertiens réels.
  Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme ; identités de polarisation, identité du parallélogramme. Vecteur unitaire, vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel ; familles orthogonales, familles orthonormales. Théorème de Pythagore. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre ; lorsque l'espace est de dimension finie, existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt, factorisation QR d'une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.
  Matrice de Gram G d'une famille $(v_1,\ldots,v_p)$ d'éléments de E ; $G = {}^tAA$ où A est la matrice de $(v_1,\ldots,v_p)$ dans une base orthonormale de E ; $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg}(v_1,\ldots,v_p)$; déterminant de Gram $\det G$ du système $(v_1,\ldots,v_p)$, interprétation géométrique de $\sqrt{\det G}$.
  Principe des méthodes de moindres carrés ; meilleure solution approchée au sens quadratique du système d'équations linéaires $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dans le cas où $\operatorname{rg} A = p$.
- Espaces euclidiens (espaces préhilbertiens réels de dimension finie).
  Définition d'un automorphisme orthogonal, du groupe orthogonal $O(E)$. Matrices orthogonales, groupe $O(n)$. Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3.
  Définition d'un endomorphisme symétrique ; matrice associée dans une base orthonormale. Théorème (*admis*) de réduction d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale. Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.
- Formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$.
  Définition d'une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et de la forme polaire associée. Matrice d'une forme bilinéaire symétrique (resp. d'une forme quadratique) dans une base orthonormale. Réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale. Application à la recherche de l'équation réduite et des axes d'une conique ou d'une quadrique dont un centre de symétrie est donné.

5. Transformations du plan et de l'espace (euclidiens orientés)

- Isométries affines du plan et de l'espace. Toute isométrie affine est une transformation affine. Expression d'une isométrie affine comme composée de réflexions. Déplacements.
- Étant donnés deux points distincts A et B du plan ou de l'espace, il existe une réflexion affine et une seule échangeant A et B.
- Tout déplacement du plan est soit une une translation, soit une rotation affine. Composition des rotations affines du plan.
- Tout déplacement de l'espace est soit une translation, soit une rotation affine, soit un vissage. Décomposition pratique d'un déplacement de l'espace en produit de réflexions.

Commentaires

1. Rappels et compléments sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

On définit d'abord la somme et la somme directe de deux sous-espaces vectoriels, ensuite on généralise ces notions au cas d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de la manière suivante : si $E_1,\ldots,E_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, leur somme $E_1+\cdots+E_p$ est directe si pour tout $(x_1,\ldots,x_p) \in E_1\times\cdots\times E_p$,

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \Longrightarrow (x_i = 0_E,\ 1 \leqslant i \leqslant p),$$

au quel cas, la somme $E_1+\cdots+E_p$ se note $E_1\oplus\cdots\oplus E_p$.

Si E est de dimension finie, la somme $E_1+\cdots+E_p$ est directe si, et seulement si, sa dimension est égale à la somme des dimensions des sous-espaces vectoriels $E_1,\ldots,E_p$.

Pour l'équation homogène $f(x) = 0$, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$; dans le cas général, il est vide si $b \notin \operatorname{Im} f$, et de la forme $x_o + \operatorname{Ker} f = \{x_o + x \ ; x \in \operatorname{Ker} f\}$ si $b \in \operatorname{Im} f$.

On rappelle la définition d'une matrice de passage, celle de deux matrices carrées semblables puis l'interprétation en terme de changement de base.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement s'il existe $T_1,\ldots,T_q$ et $T_1',\ldots,T_p'$, matrices élémentaires d'ordre n, telles que $T_q\ldots T_1 A T_1'\ldots T_p' = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

2. Déterminants

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n est introduit de manière récursive par le biais du développement par rapport à une ligne ou une colonne généralisant ainsi les formules vues en première année pour les déterminants d'ordre 2 ou 3. Cette notion servira d'outil dans les problèmes de réduction des endomorphismes.

Déterminant triangulaire par blocs : on peut se limiter aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Le groupe symétrique n'étant pas au programme, la formule de développement d'un déterminant (dite aussi formule de Leibniz) donnant l'expression du déterminant d'une matrice en fonction de ses coefficients n'est pas non plus au programme.

3. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. Quand l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de diagonalisation par réunion de bases de chacun des sous-espaces propres.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure ; mis à part les cas élémentaires (endomorphisme d'un espace de dimension 3 ayant deux valeurs propres distinctes par exemple), les étudiants n'ont pas à connaître de méthode générale pour trouver une telle base.

Pour l'étude de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, on se limitera aux relations de la forme $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$.

4. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

La méthode des moindres carrés sera développée à partir d'exemples.

Sont hors programme toute notion générale sur les formes bilinéaires, ainsi que les notions de rang et de signature d'une forme quadratique.

On reliera l'étude des formes quadratiques à celle de la matrice de l'opérateur d'inertie d'un solide figurant au programme de mécanique.

5. Transformation du plan et de l'espace

On fera le lien des isométries affines avec les automorphismes orthogonaux.

III - Séries - Intégrales dépendant d'un paramètre

Objectifs

Cette partie se concentre pour une part essentielle sur une pratique effective de l'analyse : étude de la convergence d'une série, calcul de sa somme, étude élémentaire de fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre. L'accent est mis sur l'expression des fonctions comme somme d'une série entière ou d'une série de Fourier. Il est à noter toutefois qu'aucune notion générale n'est au programme sur les suites et les séries de fonctions et leurs modes de convergence.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- *sachent établir la convergence ou la divergence d'une série dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une suite positive aux suites de référence,*
- *puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière et sachent calculer, dans certains cas, la somme d'une telle série à l'aide des fonctions élémentaires,*
- *sachent exprimer le développement en série de Fourier des fonctions périodiques,*
- *aient pratiqué quelques algorithmes de calcul numérique,*
- *aient maîtrisé l'usage des outils pour étudier les fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre,*
- *sachent appliquer la transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

Contenu

1. Séries de nombres réels ou complexes

- Espace vectoriel des séries à termes réels ou complexes; suite des sommes partielles d'une série. Sous-espace vectoriel des séries convergentes; somme, suite des restes d'une série convergente. Critère de convergence d'une série géométrique.
- Série absolument convergente; toute série absolument convergente est convergente (*preuve non exigible*).
- Séries à termes positifs : principe de comparaison, comparaison logarithmique, critères de d'Alembert. Comparaison de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et de la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ positive, continue et décroissante. Séries de Riemann.
- Critère de Leibniz pour les séries alternées, signe et majoration du reste.
- Produit de Cauchy de deux séries; si deux séries sont absolument convergentes, leur série produit converge absolument et sa somme est égal au produit des sommes des deux séries en question. (*résultat admis*).

2. Séries entières

- Définition des séries entières d'une variable complexe; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, intervalle (ouvert) de convergence.
- Propriétés (*admises*) de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle (ouvert) de convergence : continuité, dérivation et intégration terme à terme (avec conservation du rayon de convergence).
  Résultat (*admis*) de la continuité de la fonction somme d'une série entière en l'une des bornes de son intervalle de convergence si la série converge en cette borne.
- Développement en série entière autour de 0 des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto e^x$, cos, sin, cosh, sinh et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, où α est réel.
- Exponentielle complexe : expression, pour z complexe, de $\exp(z)$ (ou e^z) comme somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$. Formule d'addition : $e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$.
- Exemples d'emploi des séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

3. Séries de Fourier

- Coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et continue par morceaux (sous forme trigonométrique et sous forme complexe), relation entre les coefficients de Fourier sous forme complexe et les coefficients de Fourier sous forme trigonométrique. Série de Fourier donnée sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle (série à double entrée), sommes partielles de la série de Fourier d'une telle fonction.
- Théorème de Parseval : convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier d'une fonction périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (*résultat admis*).
- Théorème de Dirichlet : convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (*résultat admis*).
- Espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ des applications T-périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\ dt$; norme associée à ce produit scalaire. Dans cet espace préhilbertien, la famille de fonctions $t \longmapsto \cos(n\omega t)$ et $t \longmapsto \sin(n'\omega t)$, $(n,n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, est orthogonale; la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la série de Fourier de f, notée $S_n(f)$, est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par $\{t \mapsto \cos(k\omega t),\ t \mapsto \cos(k'\omega t)\ ;\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant k' \leqslant n\}$.

4. Intégrales dépendant d'un paramètre

- Théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Théorème de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (formule de Leibniz); extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- Fonction Γ : intégrale eulérienne de seconde espèce, équation fonctionnelle, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).
- Transformée de Laplace
  Définition de la transformée de Laplace; linéarité, dérivabilité. Transformée de Laplace de la dérivée n-ième d'une fonction. Comportement à l'infini de la transformée de Laplace. Valeur initiale, facteur d'échelle, retard et amortissement.
  Applications à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Commentaires

1. Séries de nombres réels ou complexes

Une série à termes réels positifs est convergente si, et seulement si, l'ensemble des sommes finies de ses termes est majoré, auquel cas la borne supérieure de cet ensemble est égale à la somme de la série. Dans le cas où une série à termes positifs est divergente, il est pratique de convenir que sa somme est égale à $+\infty$.

Inégalité triangulaire : pour toute série absolument convergente $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ à termes dans $\mathbb{K}$, on a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Comparaison des convergences des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, à termes positifs, dans le cas où $u_n \leqslant v_n$ et dans le cas où $u_n \sim v_n$. Application au cas où l'une des deux séries est de Riemann.

Critère de d'Alembert : soit (a_n) une suite de réels strictement positifs ; si la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe et est strictement inférieure à 1 (resp. strictement supérieure à 1), alors la série $\sum a_n$ est convergente (resp. la suite (a_n) tend vers $+\infty$).

Critère de Leibniz : toute série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro, est convergente.

On considère sur quelques exemples l'utilisation de sommation par parties (ou transformation d'Abel)

$$(a_0 - a_1)b_1 + (a_1 - a_2)b_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)b_n = a_0b_0 - a_1(b_1 - b_2) - a_2(b_2 - b_3) - \cdots - a_{n-1}(b_{n-1} - b_n) - a_nb_n$$

pour ramener l'étude d'une série semi-convergente à celle d'une série absolument convergente.

2. Séries entières

Une série entière (à coefficients complexes) est présentée comme une série numérique de la forme $\sum a_n z^n$ dépendant du paramètre complexe z ; le rayon de convergence est défini par le théorème d'Abel : pour toute suite (a_n) donnée, il existe un unique élément R de $[0, +\infty]$ tel que la série $\sum a_n z^n$ soit convergente si $|z| < R$ et que la suite $(a_n z^n)$ ne soit pas bornée si $|z| > R$.

Théorème de continuité de la fonction somme aux bornes de l'intervalle de convergence : si le rayon de convergence est un nombre réel $R > 0$, et si de plus la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge pour $x = R$ (resp. pour $x = -R$), la somme est continue sur $[0, R]$ (resp. $[-R, 0]$).

3. Séries de Fourier

Une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_o = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Extension aux fonctions périodiques : une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et T-périodique est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+T]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Expression des coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et continue par morceaux :
- sous forme trigonométrique : $a_o(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$ et $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$,
- sous forme exponentiel : $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Relation entre les coefficients de Fourier complexes et les coefficients de Fourier trigonométriques : pour tout entier $n > 0$, $c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))$, $c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f))$, et $c_0(f) = a_0(f)$.

Somme partielle d'ordre n de la série de Fourier d'une telle fonction :

$S_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n \Big(a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)\Big) = \sum_{k=-n}^n c_k(f)e^{ik\omega t}$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$.

Théorème de Parseval : si f est une fonction T-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et continue par morceaux, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} |a_n(f)|^2$, $\sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} \Big(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\Big)$ sont convergentes et on a la formule de Parseval suivante :

$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_o(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\Big) = |c_o(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2\Big)$.

Théorème de Dirichlet (*admis*) : si f est une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la suite $\Big(S_n(f)(t)\Big)_n$, des sommes partielles de la série de Fourier de f, converge en tout réel t, vers $\big(f(t+\circ) + f(t-\circ)\big)/2$, demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point t. Si en plus f est continue, cette suite converge vers $f(t)$ et les séries $\sum_{n\geqslant 0} |a_n(f)|$, $\sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|$ et $\sum_{n\geqslant 1} \Big(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|\Big)$ sont convergentes ; en outre, pour tous α et β réels, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de f.

On donnera l'interprétation géométrique des sommes partielles et de la formule de Parseval dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire.

On traitera des exemples variés d'applications.

4. Intégrales dépendant d'un paramètre

Les théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe intégrale sont admis.

Continuité sous le signe intégral :

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$, continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t telle que pour tout élément x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur J. S'il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout élément (x,t) de $I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination), alors la fonction g définie sur I par la relation $g(x) = \int_J f(x,t)\, dt$ est continue sur I.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie $K \times J$ ou K est un segment contenu dans I.

Dérivation sous le signe intégral (formule de Leibniz) :

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$ et dérivable par rapport à x. On suppose que :

- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J ;

- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue ;

- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$, $(x,t) \in I \times J$.

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$, $x \in I$.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Transformée de Laplace

Pour tout réel fixé α, on désigne par E_α le sous-espace de $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{C})$, espace vectoriel des fonctions continues de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, constitué des fonctions f telles que $t \mapsto e^{-\alpha t} f(t)$ soit bornée sur $[0,+\infty[$. Pour $f \in E_\alpha$, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$. L'application $\mathcal{L} : f \to F$ est linéaire de E_α dans $\mathcal{C}(]\alpha,+\infty[,\mathbb{C})$.

On donnera les transformées de Laplace des fonctions $t \longmapsto e^{\omega t}$, $t \longmapsto \cos(\omega t)$ et $t \longmapsto \sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Si $f \in E_\alpha$, alors $F = \mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a $F^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt}\, dt$, $x \in]\alpha,+\infty[, n \in \mathbb{N}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \geq 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ élément de E_α, et si de plus les dérivées successives $f', \ldots, f^{(n)}$, de f, appartiennent à E_α, alors $\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - x^{n-1}f(0) - x^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$, $x \in]\alpha,+\infty[$.

Valeur initiale : si f admet une intégrale absolument convergente sur $[0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\mathcal{L}(f)](x) = f(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.

Facteur d'échelle : si $f \in E_\alpha$, $a > 0$ et $g : t \mapsto f(at)$ alors $\mathcal{L}(g)(x) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{x}{a})$ sur $]a\alpha,+\infty[$.

Retard : si $f \in E_\alpha$, $\tau > 0$ et $g : t \longmapsto f(t-\tau)$ alors $\mathcal{L}(g)(x) = e^{-\tau x}\mathcal{L}(f)(x)$ sur $]\alpha,+\infty[$.

Amortissement : si $f \in E_\alpha$, $\omega \in \mathbb{C}$ et $g : t \longmapsto e^{-\omega t}f(t)$ alors $\mathcal{L}(g)(x) = \mathcal{L}(f)(x+\omega)$ sur $]\alpha - \mathrm{Re}(\omega),+\infty[$.

Applications aux équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre.

IV - Équations différentielles - Géométrie différentielle

Objectifs

L'objectif de cette partie est

- *d'étudier les équations différentielles linéaires et d'introduire quelques notions sur le cas non linéaire,*
- *d'appliquer les notions de base du calcul différentiel à la géométrie différentielle.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- *sachent résoudre des systèmes différentiels linéaires et des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre et du second ordre, à coefficients constants, et maîtrisent la méthode de la variation des constantes,*
- *acquièrent des notions sur les équations différentielles non linéaire d'ordre* 1 *et soient en particulier capables de déterminer et de tracer les courbes intégrales d'une équation différentielle, dans des cas simples, ainsi que les trajectoires d'un système différentiel linéaire autonome.*

- *connaissent des méthodes de calcul d'intégrales doubles et triples,*
- *sachent reconnaître et décrire les quadriques et les surfaces usuelles et aient étudié des exemples simples de représentation d'une surface notamment à l'aide de familles de courbes tracées sur cette surface ou de familles de sections planes.*

Contenu

1. Équations différentielles linéaires

- Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants
  Définition d'une solution sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) d'un système différentiel linéaire du type $X' = AX + B(t)$ où A est une matrice carrée réelle ou complexe d'ordre n et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction continue ; existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (*résultat admis*).
  Système fondamental de solutions du système homogène $X' = AX$; dimension de l'espace vectoriel des solutions.
  Pratique de la résolution du système $X' = AX+B(t)$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.
- Rappels sur les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1
  Équation $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ où a, b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes ; structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I.
- Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2
  Équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ où $a,\ b,\ c$ et d sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; équation homogène associée.
  Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur I, existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (*résultat admis*) ; dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.
  Résolution de l'équation homogène connaissant une solution ne s'annulant pas sur I. Résolution de l'équation complète par la méthode de la variation des constantes (conditions de Lagrange).

2. Notion sur les équations différentielles non linéaires d'ordre 1

- Équations différentielles à variables séparables ; cas particulier des équations différentielles incomplètes du type $f(t, x') = 0$ ou du type $f(x, x') = 0$. Notion de courbe intégrale.
- Définition d'un système autonome de deux équations différentielles scalaires de premier ordre $\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \varphi(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = \psi(x,y) \end{array}\right.$
  et de ses trajectoires dans le cas où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.
  Exemples de trajectoire d'un système différentiel linéaire autonome en dimension deux ; portrait de phase d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants.

3. Intégrales multiples

- Intégrales doubles et triples sur une partie bornée définie par des des conditions simples. Formule de Fubini élémentaire.
- Exemples de calculs par intégrations successives.
- Exemples de calculs : aire plane, masse, centre et moment d'inertie, volume, élément d'inertie d'un solide.

4. Géométrie différentielle

- Courbe paramétrée (ou chemin) de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^d$ $(2 \leqslant d \leqslant 3)$, point régulier, tangente en un point régulier ; vecteur unitaire tangent à un chemin orienté. Cas d'un point où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.
- Rectification des courbes paramétrées : longueur d'un arc régulier du plan ou de l'espace ; abscisse curviligne.
- Courbe régulière C dans $\mathbb{R}^2$ définie par une équation de la forme $f(x, y) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, sans point critique sur C. Existence d'un paramétrage local de C en tout point a de C. Vecteur tangent à C en a, ensemble T_aC des vecteurs tangents à C en a ; T_aC est le noyau de la différentielle de f en a, équation de la droite tangente $a + T_aC$ à C en a.
- Surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$, support, point régulier ; en un point régulier d'une surface paramétrée, plan tangent, normale. Cas particulier d'un paramétrage cartésien du type $z = g(x, y)$ où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, position de la surface par rapport au plan tangent en un point où $rt - s^2 \neq 0$.

- Surface régulière S dans $\mathbb{R}^3$ définie par une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, sans point critique sur S. Existence d'un paramétrage local de S en tout point a de C. Vecteur tangent à S en a, ensemble T_aS des vecteurs tangents à S en a ; T_aS est le noyau de la différentielle de f en a, équation du plan tangent $a + T_aS$ à S en a ; normale à S en a.
- Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts. Projection sur un plan de coordonnées d'une courbe définie comme intersection de deux surfaces.
- Surfaces usuelles : description des cylindres (génératrices, sections, droites), des cônes (sommet, génératrices), des surfaces de révolution (axe, méridienne, parallèles).
- Quadriques : description des quadriques à partir de leurs équations réduites en repère orthonormal (ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique, cônes et cylindres du second ordre).
  Réduction d'une fonction polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}^3$; équation réduite des coniques dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et des quadriques dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

Commentaires

1. Équations différentielles linéaires

On étudiera des exemples notamment issus de la physique ou des sciences industrielles.

On étudiera sur des exemples les solutions maximales d'une équation différentielle linéaire du type $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ ou du type $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$, où a, b, c et d sont des fonctions continues sur l'intervalle I avec a s'annulant en des points de I.

2. Notion sur les équations différentielles non linéaires d'ordre 1

On traitera les équations différentielles à variables séparables de la forme : $f(t) = g(x)\ x'$ où f et g sont des fonctions continues sur des intervalles I et J respectivement, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'étude d'équations différentielles à variables séparables est l'occasion de présenter en détail des exemples de recollement de solutions et de recherche de solutions maximales.

On donnera le principe de la méthode d'Euler (règle de la tangente) ainsi que l'algorithme de recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 ou d'un système autonome de deux équations d'ordre 1 par la dite méthode.

On étudiera des exemples de construction de courbes intégrales d'une équation différentielle, de trajectoires d'un système autonome de deux équations différentielles d'ordre 1 ; on se limitera dans la pratique à des exemples simples, notamment issus de la physique ou des sciences industrielles.

3. Intégrales multiples

On traitera en particulier des exemples de calculs d'intégrales faisant intervenir le passages en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

On étudiera des exemples d'applications du calcul intégral à des problèmes issus des sciences physiques et industrielles.

4. Géométrie différentielle

On traitera quelques exercices de révisions portant sur l'étude affine et métrique des courbes planes paramétrées ou définies par une équation polaires. Cette étude a notamment pour objectif de rappeler et d'illustrer les notions suivantes :
- Position locale de la courbe par rapport à sa tangente en un point birégulier (concavité), en un point non birégulier (inflexions, rebroussements),
- Branches infinies : directions asymptotiques, asymptotes. Position locale de la courbe par rapport à l'une de ses asymptotes,
- Courbe définie par une équation polaire $\theta \longmapsto \rho(\theta)$ où ρ est de classe $\mathcal{C}^k$ et à valeurs réelles : expression dans le repère polaire de vecteurs directeurs de la tangente et de la normale, calcul de $\tan(V)$ en un point $M \neq O$; calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire.
- Équation polaire d'une droite ne passant pas par O, d'un cercle passant par O.

L'étude locale d'une courbe en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme. Les notions de courbure, torsion, repère de Frenet sont hors programme.

On tachera de traiter des exemples et des exercices portant notamment sur :
- la recherche de contours apparents cylindriques et coniques,
- la générations de surfaces, la recherche de paramétrages ou la mise en équation dans un repère adéquat,
- la représentation d'une surface à l'aide de familles de courbes tracées sur la surface ou à l'aide de famille de sections planes.