

# Programme de Mathématiques

---

de la classe préparatoire  
**TS1**

# Préambule

## Objectifs généraux de formation

---

L'enseignement des mathématiques dans la filière Technologie et Sciences Industrielles (TSI) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs. Il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

- l'acquisition de connaissances et la maîtrise de techniques usuelles ;
- le développement simultané du sens de la rigueur et du goût du concret ;
- l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique, de recherche et de synthèse ;
- le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs. Les élèves doivent connaître les définitions, les énoncés complets des théorèmes figurant au programme ainsi que les démonstrations exigibles et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes.

Il est attendu que la pratique du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques etc.) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points

de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Les élèves doivent aussi être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité de comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

## Organisation du texte du programme

---

Le programme de la classe de première année TSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en chapitres (numérotés 1, 2, ...). Chaque chapitre comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels, délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

## Contenu du programme

---

Le programme définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amenée à développer. Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans différents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte d'une part sur le secteur de l'analyse et des probabilités, et d'autre part sur celui de l'algèbre et de la géométrie. L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec d'autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

Le programme d'algèbre comprend l'étude des polynômes à une indéterminée et celle des notions de base de l'algèbre linéaire pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique, algébrique et numérique.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction ; il combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Les interactions entre les aspects discret et continu y sont mises en valeur.

L'enseignement des probabilités fournit un modèle mathématique prenant en compte l'aspect aléatoire d'un phénomène. Il permet ainsi d'aborder des situations réelles où le hasard intervient. En première année seules les variables aléatoires discrètes sont étudiées.

Le programme aborde les notions de convergence et de comparaison des ordres de grandeur (étude locale), l'étude des propriétés globales des fonctions liées à la continuité et à la dérivabilité, l'étude des probabilités et des variables aléatoires discrètes ainsi que les notions de dimension et de rang en algèbre linéaire et quelques notions de base sur le produit scalaire et la géométrie euclidienne. Il développe les techniques relatives à

- à l'usage des inégalités (accroissements finis, convexité, TAYLOR-LAGRANGE, CAUCHY-SCHWARZ, etc.),
- aux calculs sur les nombres (entiers, réels, complexes) et les polynômes,
- à la pratique des développements limités et leurs applications,
- à l'étude de la convergence ou de la divergence d'une suite ou d'une fonction,
- à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires,
- au calcul matriciel et à la résolution des systèmes d'équations linéaires,
- à la pratique d'algorithmes divers.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes (algorithmes du pivot de GAUSS, de HÖRNER, méthodes de NEWTON et des approximations successives, méthodes de calcul approché d'intégrales, etc.) qui doivent être connus et pratiqués par les élèves. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution

des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques d'éventuelles démarches collaboratives.

## Organisation temporelle de la formation

---

Le programme de la classe de première année TSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des cinq premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse et de probabilité d'une part et d'algèbre et de géométrie euclidienne de l'autre.

Les objectifs majeurs du programme de la première période sont les suivants :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures en commençant les cours dans le prolongement des programmes du cycle du baccalauréat sciences et technologies, mettant ainsi à profit les connaissances acquises au lycée ;
- familiariser les élèves avec la terminologie française ;
- amener les élèves vers des problèmes effectifs d'analyse, de probabilités, d'algèbre ou de géométrie en veillant à développer leur
  - intuition,
  - capacité à formuler clairement des résultats ou des raisonnements,
  - capacité à mettre au point des démonstrations.
- mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus, et susciter la curiosité et l'intérêt des élèves en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux ;
- donner les bases mathématiques indispensables à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles, informatique, etc.) ;
- d'éviter de proposer des exposés formels plus ou moins dogmatiques et inconsistants.

## Recommandations pédagogiques

---

Ce programme propose des activités dont les unes mettent en œuvre des techniques classiques et bien délimitées qui doivent être maîtrisées par les élèves, les autres visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée, et avec lesquelles les élèves doivent acquérir une certaine familiarité. Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main de ces techniques classiques dont la maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices et à des problèmes que les élèves doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les développements formels ou trop abstraits doivent être évités ; une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible

avec les enseignements de physique, de chimie, des sciences industrielles et d'informatique, tout en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique.

Les interactions entre les différentes parties du programme sont fortes et méritent d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique. Quelques repères historiques, permettant d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, pourront être fournis aux élèves pour mettre en valeur la dimension et le contenu culturels des mathématiques.

L'évolution des matériels et logiciels conduit à renforcer la partie réservée à l'algorithmique. En effet, ces moyens de calcul permettent aux mathématiques de disposer d'un lien vivant à l'expérimentation. Ainsi, on présentera de préférence, lorsque cela est possible, des méthodes constructives accompagnées de la description d'un algorithme plutôt que des démonstrations d'existence ou de convergence démunies de procédé de construction. La présentation des algorithmes s'entend sur deux niveaux. D'une part, ils peuvent être présentés sous une forme logique abrégée, sans référence obligatoire à un langage informatique particulier ; d'autre part, ils sont destinés à être mis en œuvre sur machine à l'occasion des heures passées en salle d'informatique sous forme de travaux pratiques de mathématiques.

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les chapitres qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité<sup>1</sup> des élèves et en évitant tout dogmatisme. En effet l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu doit motiver les élèves, favoriser l'acquisition des connaissances et permettre le développement de leurs compétences et capacités.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

---

1. "Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." BENJAMIN FRANKLIN (« Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

# Première période

## 1. Vocabulaire de la théorie des ensembles et éléments de logique

---

*Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux élèves pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.*

*Ces notions doivent être introduites de manière progressive, au fur et à mesure des besoins et des exemples rencontrés dans le programme, en vue d'être acquises en fin de la première période. Elles ne doivent faire l'objet d'aucune étude exhaustive bloquée en début d'année.*

*Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.*

*On suppose les élèves familiers avec la théorie naïve élémentaire des ensembles. L'objectif est de fixer la terminologie.*

Implication, condition nécessaire, condition suffisante.

Négation d'un énoncé.

les élèves doivent être capables de formuler la négation d'un énoncé.

Raisonnement par contraposition ; raisonnement par l'absurde. Équivalence logique. Connecteurs ET et OU.

Quantificateurs.

Les élèves doivent être entraînés à l'emploi des quantificateurs pour formuler avec précision les énoncés mathématiques ainsi que leurs négations. On insistera sur la qualité de rédaction des textes mathématiques ou plus généralement scientifiques. En particulier l'utilisation des quantificateurs et des symboles mathématiques en tant qu'abréviations doit être évitée.

Ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels. Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément. Raisonnements par récurrence (faible et forte).

On ne construit pas  $\mathbb{N}$ , on rappelle et on utilise ses propriétés.

Ensembles. Éléments d'un ensemble, relation d'appartenance. Parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble, relation d'inclusion.

L'ensemble vide est noté  $\emptyset$ , l'ensemble des parties d'un ensemble  $E$  est noté  $\mathcal{P}(E)$ .

Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Partition d'un ensemble.

Notation  $A \setminus B$  pour la différence et  $E \setminus A$  ou  $\bar{A}$  ou  $C_E^A$  pour le complémentaire d'une partie  $A$  de  $E$ .

Produit cartésien d'ensembles.

Relation binaire sur  $E$ , relation d'équivalence, relation d'ordre. Ordre partiel, ordre total. Pour  $A$  partie non vide de  $E$  ordonné : notions de majorant et de minorant, de plus grand élément (maximum), et plus petit élément (minimum).

Application (ou fonction) d'un ensemble non vide  $E$  dans un ensemble non vide  $F$ . Restriction et prolongement.

Famille indexée par un ensemble non vide.

Indicatrice d'une partie  $A$  d'un ensemble  $E$ .

Image directe, image réciproque d'une application.

Composition d'applications.

Injection, surjection, bijection. Application réciproque d'une bijection. Composées d'injections, de surjections, de bijections. Réciproque de la composée de bijections.

L'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de  $E$ . La notion d'ensemble-quotient est hors programme.

Insister sur l'existence et l'unicité de l'image de tout élément de l'ensemble de départ  $E$ . Notations  $\mathcal{F}(E, F)$  et  $F^E$ . La restriction de  $f$  à  $A$  est notée  $f|_A$ .

Notation  $1_A$ . On a  $1_A(x)$  vaut 1 si  $x \in A$ , 0 sinon.

Notations  $f(A)$  et  $f^{-1}(B)$ .

L'application réciproque d'une bijection  $f$  est notée  $f^{-1}$ . La notation  $f^{-1}(B)$  est cohérente.

## 2. Nombres complexes : calculs algébriques et applications géométriques

*L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises en classe de terminale du cycle du baccalauréat. Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves sachent manipuler les nombres complexes et les utiliser pour résoudre des problèmes de géométrie plane*

*Le programme combine les aspects suivants :*

- l'étude algébrique du corps  $\mathbb{C}$  et les équations algébriques (équations du second degré, racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et leur utilisation en géométrie plane ;
- l'introduction de l'exponentielle complexe et l'étude de ses applications à la trigonométrie.

*Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.*

Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

L'ensemble  $\mathbb{C}$  peut être construit à partir de  $\mathbb{R}^2$  mais le programme ne comporte aucun résultat théorique sur cette construction.

Conjugaison. Opérations sur les nombres complexes, propriétés.

Compatibilité de la conjugaison avec les opérations.

Affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur.

Le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct est identifié à  $\mathbb{C}$ .

Module d'un nombre complexe, relation  $|z|^2 = z\bar{z}$ .

Module d'un produit, module d'une somme.

Interprétation géométrique de  $|z - z'|$ , distance, cercle, disque. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Cercle trigonométrique  $U$ . Paramétrisation par les fonctions circulaires.



Définition de  $e^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Relation  $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$ . Factorisation de  $e^{is} + e^{it}$ . Trigonométrie circulaire. Formules d'addition. Formules d'EULER et de MOIVRE

Forme trigonométrique  $re^{it}$  avec  $r > 0$  d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Coordonnées polaires.

Interprétation géométrique du module et de l'argument de  $\frac{z-b}{z-a}$ .

Interprétation géométrique des applications  $z \mapsto az+b$ . Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations. Cas général.

Interprétation géométrique de la conjugaison. Réflexions du plan.

Résolution des équations du second degré dans  $\mathbb{C}$ .

Racines  $n$ -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe  $z \neq 0$ .

Définition de l'exponentielle complexe :  $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}e^{i\operatorname{Im}(z)}$ . Exponentielle d'une somme. Résolution de l'équation  $\exp(z) = a$ .

Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

Exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. Téléscopages.

Sommes doubles, sommes triangulaires. Produit de deux sommes finies.

Sommes usuelles  $\sum_{k=1}^n k^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\sum_{k=1}^n x^k$ .

Factorielle. Coefficients binomiaux.

Formule et triangle de PASCAL. Formule du binôme de NEWTON.

Les élèves doivent savoir linéariser des puissances de fonctions circulaires, savoir exprimer simplement des sommes comme  $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$ .

Congruence modulo  $2\pi$  sur  $\mathbb{R}$ . Transformation de  $a \cos t + b \sin t$  en  $r \cos(t - \varphi)$  (amplitude, phase).

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Cyclicité.

L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

Somme et produit des racines.

Notation  $U_n$ . Représentation géométrique.

Notations  $\exp(z)$ ,  $e^z$ .

Notations  $\sum$ ,  $\prod$ .

Factorisation de  $a^n - b^n$ .

Notation  $\binom{n}{p}$ .

### 3. Systèmes d'équations linéaires

*Dans ce chapitre, on étudie les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels ou complexes. Les solutions de tels systèmes sont obtenues en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes (méthode de Gauss).*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves soient capables, au moyen de l'algorithme de Gauss, de résoudre un système d'équations linéaires.*

Système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues, à coefficients  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$  et second membre  $b_1, \dots, b_n$ . Les  $a_{i,j}$  et  $b_i$  sont éléments de  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On peut présenter le système sous forme de couple : tableau  $A$  des  $a_{i,j}$ , colonne  $B$  des  $b_i$ .

Solutions dans  $\mathbb{K}^p$  d'un système d'équations linéaires. Si  $s$  désigne le système linéaire on note  $S(s)$  l'ensemble des solutions.

Système linéaire homogène : les  $b_i$  sont tous nuls.

Systèmes échelonnés : le système linéaire est échelonné quand les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. si une ligne de  $A$  est nulle, les lignes suivantes le sont aussi ;
2. quand deux lignes successives de  $A$  sont non nulles l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne supérieure est strictement inférieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne inférieure.

Chaque premier terme non nul d'une ligne d'un système échelonné est appelé pivot.

Inconnues et équations principales ; inconnues secondaires ou paramètres.

Système incompatible. Système compatible.

Forme générale des solutions d'un système compatible échelonné.

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire. Une opération élémentaire transforme un système linéaire  $s$  en un système linéaire  $s'$  qui possède le même ensemble de solutions.

Algorithme du pivot de GAUSS. En utilisant échanges de lignes et transvections on peut transformer  $s$  en  $s'$  échelonné. Noter l'égalité  $S(s') = S(s)$ .

On introduit aussi  $T$ , appelé tableau augmenté, de terme général  $t_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \in [[1, p]] \\ b_i & \text{si } j = p + 1 \end{cases}$ . Ces

présentations simplifiées sont intéressantes pour le traitement informatique d'un système linéaire. Elle conduisent naturellement à l'utilisation de matrices.

$S(s)$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{K}^p$ .

Dans le cas homogène, pour tout couple  $(x_1, \dots, x_p)$ ,  $(x'_1, \dots, x'_p)$  de solutions et tout couple  $(\alpha, \beta)$  de  $\mathbb{K}^2$ ,  $(\alpha x_1 + \beta x'_1, \dots, \alpha x_p + \beta x'_p)$  est solution.

Un système linéaire *non nul* est échelonné quand il existe un entier  $k \in [[1, n]]$  et une application strictement croissante  $\varphi : [[1, k]] \mapsto [[1, p]]$  tels que  $a_{i, \varphi(i)} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ , et  $(j < \varphi(i)$  ou  $i > k)$  implique  $a_{i,j} = 0$ .

Description des solutions au moyen d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.

On utilise les notations traditionnelles  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  (transvection),  $L_i \leftrightarrow L_j$  (échange),  $L_i \leftarrow \alpha L_i$  (dilatation).

Un changement d'indexation des inconnues permet, dans une ultime étape, d'obtenir un système échelonné pour lequel  $\varphi(i) = i$ , quel que soit  $i \in [[1, k]]$ . Le nombre  $k$  de pivots est un invariant du tableau  $A$  des coefficients  $a_{i,j}$ , cela sera démontré plus tard (rang d'une matrice).

Le nombre de paramètres est égal à la différence du nombre d'inconnues et du rang.

Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires.

Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.

Pour des systèmes de taille  $n > 3$  ou  $p > 3$ , on utilise l'outil informatique. On met en évidence sur un exemple l'instabilité numérique de la méthode due aux erreurs d'arrondis.

#### 4. Géométrie élémentaire du plan et de l'espace

---

*À l'issue de la classe terminale, les élèves connaissent « le plan géométrique » euclidien et « l'espace géométrique » euclidien (de dimension 3) en tant qu'ensembles de points. Ils connaissent en particulier la façon d'associer à deux points A et B le vecteur  $\overline{AB}$  ainsi que les propriétés opératoires usuelles des vecteurs. Il s'agit de leur faire constater que l'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace) est muni d'une structure de plan vectoriel (resp. d'espace vectoriel de dimension 3) en l'identifiant à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{C}$  (resp. à  $\mathbb{R}^3$ ) par la donnée d'une base orthonormale. Toute théorie générale sur la notion d'espace vectoriel est exclue à ce stade.*

*Dans le plan et l'espace, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles.*

*Il est recommandé d'aborder les notions de repérage et de produit vectoriel dans l'espace en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.*

##### Cas du plan

---

*Les notions d'orientation du plan et celle de base orthonormale directe sont admises.*

Repère cartésien du plan, coordonnées cartésiennes.

On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.

Repère orthonormal (orthonormé), orthonormal direct, changement de repère.

$(e_1, e_2)$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , repère polaire  $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$  du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  défini par :  $\vec{u}(\theta) = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2$  et  $\vec{v}(\theta) = -(\sin \theta)e_1 + (\cos \theta)e_2$ .

Coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormé.

Les élèves doivent maîtriser le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

Définition géométrique du produit scalaire. Interprétation en termes de projection orthogonale.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$  si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  sinon.

Bilinéarité, symétrie du produit scalaire ; expression dans une base orthonormale directe. Orthogonalité de deux vecteurs.

Les élèves doivent être capables de déterminer une mesure d'un angle non orienté.

Définition géométrique du déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée directe.  
Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.

Notations  $[\vec{u}, \vec{v}]$ .

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls,  $[\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$  ;  
sinon  $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$ .

Interprétation en termes d'aire orienté d'un parallélogramme.

Bilinéarité, antisymétrie du produit vectoriel ; expression dans une base orthonormale directe.

Droite, vecteur directeur, vecteur normal ; équation cartésienne et système d'équations paramétriques.

Intersection de deux droites ; projeté orthogonal d'un point sur une droite ; distance d'un point à une droite.

Cercle, équation cartésienne, représentation paramétrique.

Les élèves doivent être capables de donner une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon ou connaissant un diamètre, et de déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation.

Transformations affines du plan : translation, rotation, homothétie, réflexion.

Les élèves doivent connaître divers modes de représentation de ces transformations : modes géométrique et analytique.

## Cas de l'espace

---

*Dans ce chapitre, on adapte à l'espace les notions étudiées dans le cas du plan. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur les acquis des élèves en géométrie plane et sur l'intuition géométrique qu'ils ont développé dans les autres disciplines.*

*La notion d'orientation de l'espace et celle de base orthonormale directe sont admises ; la notion d'orientation de l'espace repose sur les conventions physiques usuelles.*

Repère cartésien de l'espace, coordonnées cartésiennes.

On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.

Repère orthonormal (orthonormé), orthonormal direct, changement de repère.

Définition géométrique du produit scalaire.  
Bilinéarité, symétrie.

Expression dans une base orthonormale.

Définition géométrique du produit vectoriel.

Notations  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  ou  $\vec{u} \times \vec{v}$ . Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires,  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est le vecteur de norme  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$  directement orthogonal à  $(\vec{u}, \vec{v})$  ;  
sinon  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

Bilinéarité, antisymétrie du produit vectoriel ; expression dans une base orthonormale directe.

Les élèves doivent être capables de déterminer si deux vecteurs sont colinéaire.

Produit mixte de trois vecteurs.

Interprétation de  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  comme volume du parallélépipède construitsur les evcteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

Trilinéarité, antisymétrie.

Plan de l'espace : définition par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal ou trois points non alignés.

Droites de l'espace : définition par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts ou comme intersection de deux plans.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan. Distance d'un tel point à un plan ou une droite.

Sphère, équation cartésienne en repère orthonormé. Intersection d'une sphère et d'un plan.

Notation  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ .

Les élèves doivent être capables de déterminer si trois vecteurs sont coplanaires.

Expression du produit mixte dans une base orthonormale directe.

Équation cartésienne, système d'équations paramétriques.

Obtention d'un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans. Détermination d'un système d'équations cartésiennes ou d'un système d'équations paramétriques d'une droite.

Les élèves doivent être capables de donner une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon, et de déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation.

## 5. Nombres réels

*Les nombres réels sont supposés connus ; on rappelle leurs propriétés fondamentales sans pour autant adopter un point de vue axiomatique, en mettant l'accent sur le principe de la borne supérieure / inférieure.*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves aient une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités et soient entraînés à l'usage de la caractérisation de la borne supérieure / inférieure.*

*On peut utiliser les quantificateurs pour formuler certaines propriétés des réels (notamment celles relatives à l'ordre) et obtenir leurs négations.*

Nombre rationnels, réels, irrationnels.  $\mathbb{R}$  est un corps commutatif totalement ordonné.

Valeur absolue d'un réel. Inégalités triangulaires.

Propriété d'ARCHIMÈDE. Partie entière. Approximations décimales d'un réel.

Majorant, minorant d'une partie non vide. Plus grand, plus petit élément d'une partie non vide (sous réserve d'existence).

Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si pour tous  $a, b \in X$  tels que  $a \leq b$ ,  $[a, b] \subset X$ .

La construction de  $\mathbb{R}$  est hors programme.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq \alpha$ ,  $|x - a| < \alpha$ .

Notation  $\lfloor x \rfloor$ . Valeurs décimales approchées à la précision  $10^{-n}$  par défaut et par excès.

$[a, b]$  peut être introduit comme étant l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ .

Segment.	Intervalle admettant un plus petit et un plus grand élément
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie $X$ non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ .	Caractérisation. Notations $\sup X$ (resp. $\inf X$ ).
Axiome de la borne supérieure.	
Partie dense de $\mathbb{R}$ ; densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ .	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

## 6. Suites numériques

---

*Ce chapitre conjointement avec le précédent posent les fondements du programme d'analyse en PCSI. Il est consacré aux suites numériques et combine l'étude des aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) et celle des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).*

*On soulignera l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).*

### Suites réelles

---

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Limite finie ou infinie d'une suite

Notation  $u_n \rightarrow l$

Unicité de la limite.

Écriture  $\lim u_n = l$ .

Suite convergente, divergente

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Exemples de formes indéterminées.

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l > 0$ , alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.

Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.

Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .

Théorème des suites adjacentes.

Suite extraite.

Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  tendent vers  $l$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $l$ .

Caractérisation séquentielle de la densité d'une partie de  $\mathbb{R}$ .

Applications : densité de  $\mathbb{Q}$  et de l'ensemble des nombres décimaux.

Si  $X$  est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de  $\mathbb{R}$ , il existe une suite d'éléments de  $X$  de limite  $\sup X$  (resp.  $+\infty$ ).

### Suites Complexes

---

Brève extension des définitions et résultats précédents : convergence, suite complexe bornée. Toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes (combinaisons linéaires, produit, quotient).

Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

Les élèves doivent savoir déterminer une expression du terme général  $u_n$  d'une telle suite en fonction de  $n$ .

## 7. Fonctions de la variable réelle, limites et continuité

---

*Ce chapitre est consacré à l'étude des notions de limite et de continuité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes. Les propriétés à caractère local sont énoncées et étudiées finement à l'aide des  $\varepsilon$  et des  $\eta$ .*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions continues.*

*Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. On tâchera ici de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.*

### Généralités

---

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction  $f$  à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme  $f + g$ , produit  $fg$ , composée  $g \circ f$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$ .

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Graphes des fonctions  $x \mapsto f(x) + a$ ,  $x \mapsto f(x + a)$ ,  $x \mapsto f(a - x)$ ,  $x \mapsto f(ax)$ ,  $x \mapsto af(x)$ .

Interprétation géométrique de ces propriétés.

### Limites et continuité

---

*Les notions de limites ont déjà été abordées pour les suites, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats sans démonstrations.*

*Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).*

*Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point  $a$  considéré par la suite est toujours élément de  $I$  ou extrémité de  $I$ .*

*On dit qu'une propriété portant sur une fonction  $f$  définie sur  $I$  est vraie au voisinage de  $a$  si elle est vraie sur l'intersection de  $I$  avec un intervalle ouvert centré en  $a$  lorsque  $a$  est réel, avec un*

*intervalle*  $[A, +\infty[$ , si  $a = +\infty$ , avec un *intervalle*  $] -\infty, A]$  si  $a = -\infty$ .

Limite finie ou infinie d'une fonction en  $a$ .

Notations  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

Unicité de la limite.

Écritures  $\lim_a f = l$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

Si  $f$  est définie en  $a$  et possède une limite  $l$  en  $a$ , alors  $l = f(a)$ .

Si  $f$  possède une limite finie en  $a$ ,  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Limite à droite, limite à gauche.

Notations  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

Extension de la notion de limite en  $a$  lorsque  $f$  est définie sur  $I \setminus \{a\}$

Notations  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$ .

Image d'une suite de limite  $a$  par une fonction admettant une limite en  $a$ .

Opérations algébrique sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

Exemples de formes indéterminées.

Composition de limites.

Application aux suites définies par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Image d'une suite de limite  $a$  par une fonction continue en  $a$ .

Conservation des inégalités larges par passage à la limite.

Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite  $+\infty$ ), de majoration (limite  $-\infty$ ). Théorème de la limite monotone.

Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite.

Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient. Composition de fonctions continues.

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Cas d'une fonction strictement monotone.

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et si  $y$  est un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $x$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(x) = y$ . Il en résulte que l'image d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  par une fonction continue réelle définie sur  $I$  est un intervalle.

Calcul approché d'un zéro d'une fonction continue par l'algorithme de dichotomie.

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



La fonction  $f$  étant supposée continue sur  $I$ , elle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Extension des définitions et résultats précédents au cas de fonctions à valeurs complexes : limite et continuité en un point, continuité sur un intervalle ; toute fonction admettant une limite finie en  $a$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en un point, continues en un point ou continues sur un intervalle (combinaisons linéaires, produit, quotient).

Pour toute fonction complexe  $f$  continue sur un segment, les fonctions  $f$  et  $|f|$  sont bornées et  $|f|$  atteint ses bornes.

Une fonction continue et strictement monotone sur  $I$  réalise une bijection de  $I$  sur son image  $f(I)$  ; sa fonction réciproque est continue sur l'intervalle  $f(I)$ , strictement monotone et de même sens de variations que  $f$ .

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

## 8. Fonctions de la variable réelle, dérivation

---

*Ce chapitre est consacré à l'étude de la dérivation ; on y aborde aussi les fonctions usuelles et les fonctions convexes.*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves*

- aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions dérivables ;*
- puissent mener l'étude d'une fonction ( continuité et dérivabilité, prolongement, symétries, périodicité, domaine d'étude, sens de variations, recherche d'extremums et obtention d'inégalités, tracé du graphe et détermination des asymptotes, tracé du graphe de la réciproque, ... ) ;*
- aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalité des accroissements finis , inégalités de convexité, inégalité de Cauchy-Schwarz, etc.).*

*On attachera une importance à l'aspect géométrique des propriétés étudiées en ayant recours à de nombreuses figures pour les illustrer et les visualiser.*

*Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point  $a$  considéré par la suite est toujours élément de  $I$ .*

### Fonctions dérivables

---

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

Interprétation géométrique : tangente au graphe en un point.

La dérivabilité entraîne la continuité.

Dérivabilité à gauche, à droite.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient.

Dérivée d'une fonction composée, dérivée de la fonction réciproque.

Extremum local, extremum global.

Si  $f$  est dérivable et présente un extrémum local en un point  $a$  intérieur à  $I$  alors  $a$  est un point critique de  $f$

Théorème de ROLLE, égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si  $f$  est dérivable et si  $|f'|$  est majorée par  $k$ , alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne.

Application aux suites définies par  $u_{n+1} = f(u_n)$ ; algorithme de recherche du point fixe pour une fonction contractante; mise en pratique de la méthode de NEWTON dans des cas simples.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si  $f$  est continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et s'il existe  $l$  dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  tel que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = l$ , alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction. Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  : combinaison linéaire, produit (formule de LEIBNIZ), quotient. Composée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . Réciproque d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Théorème de classe  $\mathcal{C}^k$  par prolongement : si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I \setminus \{a\}$  et si  $f^{(i)}(x)$  possède une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , alors  $f$  admet un prolongement de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

Extension des définitions et résultats précédents aux fonctions complexes.

Tangente au graphe d'une réciproque.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

Interprétations géométrique et cinématique. Application à l'existence de zéros d'une fonction.

Lors de l'étude d'une telle suite, il est utile de mettre en valeur le rôle des variations de  $f$  pour en déduire celles de la suite  $(u_n)$ ; en outre, pour étudier la vitesse de convergence vers  $a$  de  $u_n$ , on peut exploiter le comportement local de  $f$  au voisinage de  $a$  et, notamment, une inégalité du type  $|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$  où  $0 \leq k < 1$ , ou du type  $|f(x) - f(a)| \leq \lambda|x - a|^2$ ,  $\lambda > 0$ .

Si  $l \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'$  est continue en  $a$ .

Résultat admis.

Caractérisation de la dérivabilité et de la classe  $\mathcal{C}^k$  en termes de parties réelle et imaginaire.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Ce résultat sera démontré dans le chapitre intégration sur un segment.

On montre à l'aide d'un contre-exemple que le théorème de ROLLE, et donc l'égalité des accroissements finis, ne s'étend pas.

## Étude de fonctions

---

Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude.

Tableau de variations.

Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.

Asymptotes.

Tracé du graphe.

Graphe d'une réciproque.

## Fonctions usuelles

---

*Les fonctions puissances, l'exponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus sont décrites en détail mais leur existence est admise ; leurs propriétés peuvent être démontrées en partie. On en déduit l'étude des autres fonctions usuelles.*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves aient une bonne connaissance des fonctions usuelles et soient en particulier capables de se représenter leur graphe, de définir les fonctions trigonométriques réciproques (circulaires et hyperboliques), de manipuler les formules d'addition, etc.*

*Notations internationales standard : exp, ln, cos, sin, tan, cot, cosh, sinh, tanh, coth, arccos, arcsin, arctan, arccosh, arcsinh, arctanh.*

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Dérivées, variations et graphes.

Relations fonctionnelles.

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

sin, cos, tan, sinh, cosh, tanh.

Fonctions réciproques

arcsin, arccos, arctan, arcsinh, arccosh, arctanh.

Fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ .

## Fonctions convexes

---

*L'objectif de cette section est d'étudier les fonctions convexes d'une variable réelle.*

*Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures. On soulignera l'intérêt des fonctions convexes pour obtenir des inégalités.*

Fonctions à valeurs réelles convexes; inégalité de convexité. Fonctions concaves.

Une fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  si pour tout  $(x, y)$  de  $I^2$  et tout  $\lambda$  de  $[0, 1]$  :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Inégalité de JENSEN

Si  $f$  est convexe sur  $I$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des points de  $I$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des éléments de  $\mathbb{R}^+$  de somme 1 alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Caractérisations : position relative du graphe et d'une de ses cordes, inégalité des pentes.

Caractérisation des fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables sur  $I$ .

Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ, de YOUNG, inégalité arithmético-géométrique.

## 9. Primitives et équations différentielles linéaires

---

*Ce chapitre est consacré au calcul des primitives et à l'étude des équations différentielles linéaires; le point de vue adopté est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur.*

*Pour illustrer le cours sur les équations différentielles, on traitera des exemples notamment issus des autres disciplines scientifiques et technologiques et on étudiera sur quelques exemples le problème de raccordements de solutions.*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves*

- soient capables de mener des calculs de primitives dans des cas usuels;*
- puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable;*
- sachent appliquer les deux points précédents lors de l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.*

*Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.*

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle.

Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme.

Les élèves doivent savoir utiliser les primitives de  $x \mapsto e^{\lambda x}$  pour calculer celles de  $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(bx)$  et  $x \mapsto e^{\alpha x} \sin(bx)$ . Ils doivent aussi savoir calculer les primitives d'une fonction du type  $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ .

Pour une fonction  $f$  continue sur  $I$ , l'intégrale de  $a$  à  $b$ ,  $\int_a^b f(x)dx$ , est donnée par  $F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  sur  $I$ .

Dérivée de  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  où  $f$  est continue.

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Résultat admis

Intégration par parties pour des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Exemples de calculs d'intégrales au moyen d'une intégration par parties ou d'un changement de variables.

Changement de variable : si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et si  $f$  est continue sur  $\varphi(I)$ , alors pour tous  $a$  et  $b$  dans  $I$

Intérêt d'un changement de variable affine pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener au cas où l'intervalle d'intégration est  $[0, 1]$  ou  $[-1, 1]$ .

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction  $a$  est constante.

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Résolution d'une équation homogène.

Principe de superposition.

Forme générale des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.

Méthode de variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.

Modélisation des circuits électriques RC, RL et des systèmes mécaniques linéaires.

Exemples d'étude dans des cas simples d'équations de type

$$a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

Raccordements de solutions.

la fonction  $a$  pouvant s'annuler en des points de  $I$ .

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires et  $f$  est une application continue à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Résolution de l'équation homogène associée. Cas particulier de l'équation  $y'' \pm \omega^2 y = 0$ .

Principe de superposition.

Forme générale des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.

Cas réel et complexe : équation caractéristique, système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Les élèves doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme  $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ ,  $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ ;  $x \mapsto B \cos(\omega x)$  et  $x \mapsto B \sin(\omega x)$ ,  $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$ .

Régime libre, régime forcé; régime transitoire, régime stationnaire.

Résultat admis.

Modélisation des circuits électriques LC, RLC. Résistance des matériaux.

## Deuxième partie

Il s'agit de compléter les résultats de la première partie en développant

- l'étude des développements limités et leurs applications ;
- l'étude des polynômes ;
- l'étude des espaces vectoriels et des applications linéaires ;
- l'utilisation du calcul matriciel en algèbre linéaire ;
- l'étude de l'intégration sur un segment d'une fonction continue ;
- les notions relatives aux probabilités en se limitant aux variables aléatoires discrètes finies.

### 10. Développements limités, calcul asymptotique

---

*Ce chapitre est consacré aux développements limités et le calcul asymptotique. Son objectif est de familiariser les élèves avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.*

*On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison. De même, on expose le calcul des développements limités (somme et produit de fonctions, fonctions composées) à partir d'exemples explicites, en évitant toute présentation systématique.*

*On insiste sur l'estimation des restes ; pratiquement, on écrira par exemple  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \beta(x)x^4$  où  $\beta$  est une fonction continue en 0, plutôt que  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ .*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves*

- connaissent les développements limités usuels ;
- maîtrisent la pratique du calcul asymptotique et ses applications au calcul des limites, à l'étude locale des fonctions et des courbes, etc.

*En revanche, les situations nécessitant des calculs très longs ou d'une grande technicité seront traités à l'aide d'outils logiciels auxquels il convient d'initier les élèves.*

Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence pour les suites. Traduction à l'aide du symbole  $o$  des croissances comparées des suites de termes généraux  $\ln^\beta(n)$ ,  $n^\alpha$ ,  $e^{\gamma n}$ .

Liens entre les relations de comparaison.

Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents.

Notations  $u_n = O(v_n)$ ,  $u_n = o(v_n)$ ,  $u_n \sim v_n$ .

On définit ces relations à partir du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$  en supposant que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Équivalence des relations  $u_n \sim v_n$  et  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

Développement limité, unicité des coefficients, troncature.

Forme normalisée d'un développement limité :

$$f(a+h) = h^p (a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n))$$

avec  $a_0 \neq 0$ .

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de TAYLOR-YOUNG : développement limité à l'ordre  $n$  en un point d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .

Développement limité à tout ordre en 0 de  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $\arctan$ , et de  $\tan$  à l'ordre 3.

Applications des développements limités : calcul d'équivalents et de limites, étude locale d'une fonction (prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement, etc.).

Utilisation des développements limités pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.

Exemples de développements asymptotiques

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.

Équivalence  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$  ; signe de  $f$  au voisinage de  $a$ .

Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les élèves doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.

La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

## 11. Courbes paramétrées dans le plan $\mathbb{R}^2$

*L'étude des courbes paramétrées dans  $\mathbb{R}^2$  prolonge celle des fonctions réelles de la variable réelle. Elle permet d'illustrer le chapitre « Développements limités, calcul asymptotique ».*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre les élèves puissent mener, sur des exemples simples, l'étude d'une courbe paramétrée ( $y$  compris en coordonnées polaires).*

*Ce chapitre est étudié notamment pour les besoins des autres disciples scientifiques et technologiques enseignées en CPGE.*



Courbe paramétrée (ou chemin) de classe  $\mathcal{C}^k$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Chemin fini, simple.

On appelle chemin ou courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  dans  $\mathbb{R}^2$  une application  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Un tel chemin est dit simple si  $\gamma$  est injective.

On définit une application de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  en considérant ses composantes.

Image  $\gamma(I)$  du chemin  $\gamma$  (ou trajectoire du mouvement  $\gamma$ ).

Point régulier, vecteur tangent en un point régulier. Chemin régulier.

Interprétation cinématique.

Mouvement d'un point mobile dans le plan, vitesse, accélération.

Définition des demi-tangentes en un point  $\gamma(t_0)$  de  $\gamma$ , de la tangente en ce point. Existence de la tangente en un point où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul, par exemple en un point régulier.

Dans cette étude on met en évidence l'utilisation des développements limités et du calcul asymptotique.

Étude locale : allure d'une courbe paramétrée en un point régulier ou singulier. Point birégulier.

On décrit les allures possibles d'une courbe en un point régulier ou singulier à partir d'exemples.

Branches infinies.

Recherche des directions asymptotiques, des asymptotes et étude de la position de la courbe par rapport aux asymptotes à partir d'exemples.

Exemples d'étude des courbes paramétrées en coordonnées polaires.

Équation polaire d'une conique.

## 12. Polynômes et fractions rationnelles

*L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de base de ces objets formels et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où le corps de base  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

Polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  à une indéterminée. Opérations : somme, produit, composée.

Notation  $\mathbb{K}[X]$ . Un polynôme est nul si et seulement si tous ces coefficients sont nuls.

Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Opérations sur les degrés : somme, produit.

Le degré du polynôme nul est  $-\infty$ .  $PQ = 0$  implique que  $P = 0$  ou  $Q = 0$ .

On note  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$ .

Multiples et diviseurs d'un polynôme, divisibilité dans  $\mathbb{K}[X]$ . Théorème de la division euclidienne.

Fonction polynomiale associée à un polynôme.

Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Dérivée  $k$ -ième d'un polynôme ; formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR polynomiale.

Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction des ses coefficients.

Cas des polynômes du second degré.

Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  ; théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Théorème d'interpolation de LAGRANGE.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Algorithme de HÖRNER pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Si  $P(a) \neq 0$ , le nombre  $a$  est considéré comme racine de  $P$  de multiplicité 0.

Les autres fonctions symétriques élémentaires ne sont pas au programme.

Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

La démonstration est hors programme.

Caractérisation de la divisibilité dans  $\mathbb{C}[X]$  à l'aide des racines et des multiplicités.

Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments distincts de  $\mathbb{K}$  et  $y_1, \dots, y_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$ , il existe un et un seul  $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que pour tout  $i$  :  $P(x_i) = y_i$ . Description des polynômes  $Q$  tels que pour tout  $i$  :  $Q(x_i) = y_i$ .

## Fractions rationnelles

---

*Le programme se limite au cas où le corps de base  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

Fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Opérations algébriques dans  $\mathbb{K}(X)$ .

Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

Éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ . Théorème d'existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ .

Décomposition en éléments simples de  $P'/P$ .

La construction de  $\mathbb{K}(X)$  n'est pas exigible.

La démonstration est hors programme, de même que la division selon les puissances croissantes. On limitera la technicité des exercices.

### 13. Espaces vectoriels et applications linéaires

---

Ce chapitre est organisé autour des axes suivants :

- étudier les notions de base relatives aux espaces vectoriels, aux applications linéaires et à l'indépendance linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire. On insiste sur les méthodes pratiques de calcul de dimension en faisant apparaître qu'elles reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace vectoriel, description d'un sous-espace vectoriel par des équations linéaires.

Lors de cette étude, on fera usage de nombreuses figures et on soulignera comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Il est attendu qu'à l'issue des deux premiers chapitres de cette partie, les élèves

- aient assimilé les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire, et les procédés usuels de leur construction ;
- sachent reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser et les représenter à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- connaissent les conséquences du théorème de la base incomplète (définition de la dimension, théorème du rang) ;
- maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un problème (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;
- soient capable, au moyen de l'algorithme de Gauss, de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs (base extraite), de compléter une famille libre en une base (base incomplète) ;
- maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### Espaces vectoriels

---

Structure de  $\mathbb{K}$  espace vectoriel. Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble non vide dans un espace vectoriel.

Espaces vectoriels  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Sous-espace vectoriel ; caractérisation.

Sous-espace nul ; droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ , droites et plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ . Droites vectorielles dans un espace quelconque.

Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Notations  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ .

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Définition par l'unicité de la décomposition du vecteur nul ; caractérisation par l'intersection.

Familles finies libres, liées.

Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degrés échelonnés est libre.

Familles génératrice d'un espace vectoriel. Base, coordonnées d'un vecteur dans une base.

Base adaptée à une somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Un espace vectoriel est dit fini-dimensionnel (ou de dimension finie) s'il possède une famille génératrice finie.

Si  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  engendre  $E$  et si  $(x_i)_{i \in I}$  est libre pour une certaine partie  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$ , alors il existe une partie  $J$  de  $\{1, \dots, n\}$  contenant  $I$  telle que  $(x_i)_{i \in J}$  soit une base de  $E$ .

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base.

Existence de bases d'un espace vectoriel fini-dimensionnel non réduit à  $\{0_E\}$ .

Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.

Utilisation de l'algorithme de GAUSS pour extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs et pour compléter une famille libre en une base.

Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de  $n+1$  vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.

En dimension  $n$ , une famille de  $n$  vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.

Rang d'une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel. Caractérisation des familles finies libres par le rang.

Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, cas d'égalité.

Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires. Vecteurs linéairement indépendants.

La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  de polynômes non nuls est dite de degrés échelonnés si  $\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$ .

Bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Si  $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  est une famille libre d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$  sont en somme directe.

Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base ; matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base.

Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Dimensions de  $\mathbb{K}^n$ , de  $\mathbb{K}_n[X]$ , de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Notation  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

Sous-espaces vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.

En dimension finie, caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires par l'intersection et les dimensions.

Base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels (formule de GRASSMANN).

## Applications linéaires

---

Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes.

Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Image, noyau d'une application linéaire. Injectivité, surjectivité.

Si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Im } u = \text{Vect}(\{u(x_i), i \in I\})$ . Image d'une base par un isomorphisme.

Endomorphismes, espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$ .

Identité, homothéties.

Définition géométrique d'une projection ou projecteur, d'une symétrie. Caractérisation par  $p^2 = p$  ou  $s^2 = \text{Id}_E$ .

Automorphismes. Groupe linéaire.

Détermination d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , une application linéaire définie sur  $E = E_1 \oplus E_2$  est entièrement déterminée par ses restrictions à  $E_1$  et  $E_2$ .

Classification, à isomorphisme près, des espaces vectoriels de dimension finie par leur dimension.

Dimension commune des supplémentaires.

L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel. Bilinearité de la composition.

Notations  $\text{Im}(u)$ ,  $\text{Ker}(u)$  ou plus simplement  $\text{Im } u$ ,  $\text{Ker } u$ .

Non commutativité de la composition dans  $\mathcal{L}(E)$  si  $\dim E \geq 2$ . Notation  $v \circ u$  pour la composée  $v \circ u$ .

Notation  $\text{Id}_E$ .

Notation  $\text{GL}(E)$ .

Si  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$  et  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de vecteurs de  $F$ , alors il existe une et une seule application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $u(e_i) = f_i$ .

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de  $u$ .

Une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite.

Applications linéaires de rang fini. Rang d'une application linéaire. Invariance par composition par un isomorphisme.

Théorème du rang : si  $E$  est de dimension finie et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $u$  est de rang fini et  $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$ .

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire du type  $u(x) = b$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  et  $F$  de dimensions finies.

Notation  $\text{rg}(u)$ .  $\text{rg}(uv) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$

Cas des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux.

La notion de sous-espace affine est hors programme en PCSI.

## 14. Matrices

---

*Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :*

- présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;
- étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire ;
- étudier l'aspect matriciel des opérations élémentaires introduites dans le chapitre sur les systèmes linéaires.

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves*

- sachent représenter une application linéaire dans des bases données et utiliser les formules de changement de bases ;
- maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un problème (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique et numérique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;
- soient capables, au moyen de l'algorithme de Gauss, de déterminer le rang d'une matrice ;
- maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.

Espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Bilinéarité, associativité du produit matriciel.

Produit de deux matrices de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ; produit de deux matrices de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Formule du binôme de NEWTON.

Dimension de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Non commutativité si  $n \geq 2$ . Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.

Application au calcul de puissances de matrices.

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  : matrice inversible, inverse, groupe linéaire ; produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures/inférieures ; inverse d'une matrices diagonales inversible.

Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base  $e$ , d'une application linéaire dans un couple  $(e, f)$  de bases. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Cas particulier des endomorphismes.

Matrice de passage d'une base à une autre.

Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice.

Rang d'une matrice. Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image et de rang. Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.

Opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice ; matrices élémentaires (matrice de transvection, de dilatation, d'échange ou de transposition).

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

Matrices équivalentes par lignes (colonnes).

Matrice échelonnée par lignes.

Dans une matrice échelonnée par lignes, chaque premier terme non nul d'une ligne non nulle est appelé pivot.

Notation  $GL_n(\mathbb{K})$ .

Notations  ${}^tA, A^T$ .

Notation  $Mat_{e,f}(u)$ .

Isomorphisme  $u \mapsto Mat_{e,f}(u)$  ; application au calcul de la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

La matrice de passage  $P_e^{e'}$  de  $e$  à  $e'$  est la matrice de la famille  $e'$  dans la base  $e$ . Inversibilité et inverse de  $P_e^{e'}$ .

Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieures/inférieures est une matrice triangulaire supérieures/inférieures.

Interprétation en termes de produit matriciel.

Deux matrices sont dites équivalentes par lignes (resp. colonnes) si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes).

Notations  $A \underset{L}{\sim} B, A \underset{C}{\sim} B$ .

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est dite échelonnée par lignes quand il existe un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et une application  $\varphi : \llbracket 1, k \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$  strictement croissante tels que  $a_{i,\varphi(i)} \neq 0, 1 \leq i \leq k$ , et  $(j < \varphi(i) \text{ ou } i > k)$  implique  $a_{i,j} = 0$ .

**Matrice échelonnée réduite par lignes**

Une matrice est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si elle est échelonnée par lignes et dont les pivots sont tous égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

L'unicité est admise.

Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices. On limitera la technicité des exercices.

Formulation matricielle de l'algorithme de GAUSS-JORDAN : pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , il existe une matrice échelonnée réduite par lignes  $E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , uniquement déterminée, et une suite finie de matrices élémentaires  $P_1, \dots, P_N$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $E = P_N \cdots P_1 M$ .

Écriture matricielle d'un système linéaire.

Système homogène associé ; rang, dimension de l'espace vectoriel des solutions.

Une autre formulation du théorème du rang : le rang d'un système d'équations linéaires homogènes est égal au rang de sa matrice, une matrice et sa transposée ont même rang, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à  $p$  inconnues de rang  $r$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^p$  de dimension  $p - r$ .

Condition de compatibilité d'un système linéaire. Structure de l'espace des solutions.

$(A, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ; le système carré  $Ax = b$  d'inconnue  $x$  possède une et une seule solution si et seulement si  $A$  est inversible si et seulement si sa matrice échelonnée réduite par lignes est  $I_n$  si et seulement si  $A \underset{L}{\sim} I_n$ .

Système de CRAMER.

## 15. Intégration des fonctions continues sur un segment

---

*Dans ce chapitre, Il s'agit de donner une construction rigoureuse de l'intégrale d'une fonction, réelle ou complexe, continue sur un segment en partant de sa définition comme une aire. Ses propriétés élémentaires sont établies, et notamment le lien entre intégration et primitivation. Ce chapitre permet aussi de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral.*

*La notion de continuité uniforme étant hors programme, le théorème sur l'approximation d'une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier est établi en ayant recourt à l'axiome de la borne supérieure.*

*Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves*

- soient capables de mener des calculs d'intégrales et de primitives dans des cas usuels ;*
- puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable ;*
- aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalités des accroissements finis et de Taylor-Lagrange, inégalité triangulaire, etc.).*



Subdivision d'un segment, pas de la subdivision.

Fonction en escalier sur un segment de  $\mathbb{R}$ .

Approximation d'une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier : si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , est une fonction continue alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction en escalier  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $|f(t) - \phi(t)| < \varepsilon$  quel que soit  $t \in [a, b]$ .

Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Propriétés usuelles : linéarité, additivité et positivité de l'intégrale.

Intégrale d'une fonction  $f$  continue sur un segment.

Linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle.

Relation de CHASLES. Extension de la notation  $\int_a^b f(t) dt$  au cas où  $b \leq a$ . Propriétés correspondantes.

Sommes de RIEMANN : si  $f$  est une fonction continue sur le segment  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Inégalité triangulaire.

Dérivation de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  pour  $f$  continue.

Théorème fondamental du calcul intégral.

Inégalité des accroissements finis.

On peut montrer cette propriété (équivalente au théorème de HEINE qui n'est pas au programme) en appliquant le principe de la borne supérieure et le fait qu'une telle fonction possède une limite à droite en tout point de l'intervalle  $[a, b[$  et une limite à gauche en tout point de l'intervalle  $]a, b]$ . Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  on parvient ainsi à construire un couple de fonctions en escalier qui encadrent  $f$  à  $\varepsilon$  près sur le segment. Une représentation graphique des fonctions est éclairante, en vue notamment de l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire.

Notations  $\int_{[a,b]} f$ ,  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ .

Notations  $\int_{[a,b]} f$ ,  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ .

Interprétation géométrique. Démonstration dans le cas où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

$f$  étant une fonction continue sur  $I$  et  $a \in I$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ . C'est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ . De plus pour toute primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt$$

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[a, b]$  alors

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f'|$$

Pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , formule de TAYLOR (à l'ordre  $n$ ) avec reste sous forme d'intégrale; inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.

Exemples de calcul d'intégrales et de primitives.  
Exemples d'emploi des formules d'intégration par partie et de changement de variable.

Intégration numérique : étude et comparaison des méthodes des rectangles et des trapèzes.

On soulignera la différence de nature entre la formule de TAYLOR-YOUNG (locale) et les formules de TAYLOR globales (reste intégral et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE).

Pour ce qui est du calcul des primitives, le seul exposé systématique concerne les fonctions rationnelles; il utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Parmi les exemples à traiter figurent la primitivation des polynômes trigonométriques par linéarisation, l'utilisation du paramétrage rationnel de  $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$  pour ramener l'intégrale d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus à celle d'une fonction rationnelle et le calcul des intégrales de WALLIS.

On présentera un algorithme associé à la méthode des trapèzes en soulignant l'intérêt des subdivisions dichotomiques; on admettra que pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'erreur est un  $O(1/n^2)$ ,  $n$  désignant le nombre de points de la subdivision.

## 16. Dénombrement

---

*Dans ce chapitre, Il s'agit d'une brève initiation aux techniques élémentaires de la combinatoire; l'objectif est de consolider les acquis du secondaire. On introduit sans formalisation excessive la notion de cardinal et on peut admettre sans démonstration les propriétés les plus intuitives. Pour la dénombrabilité, on se limite à la définition et quelques exemples.*

*L'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

*Ce chapitre est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui vu sur les calculs algébriques.*

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations  $|A|$ ,  $\text{Card}(A)$ ,  $\#A$ . Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.

La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Nombre de  $p$ -listes (ou  $p$ -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal  $n$ , nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal  $n$ . Nombre de parties à  $p$  éléments (ou  $p$ -combinaisons) d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Ensembles dénombrables, au plus dénombrables.

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable.

Exemples simples.

Démonstrations combinatoires des formules de PASCAL et du binôme.

Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ . Un ensemble est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est dénombrable. Les parties infinies de  $\mathbb{N}$  sont dénombrables.

## 17. Espaces Probabilisés

*Ce chapitre et le suivant ont pour objectif d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes finies ; ils s'appuient sur le chapitre consacré au dénombrement. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé à minima ; en particulier :*

- la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;
- la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.

*Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des élèves.*

*Cette partie du programme relative aux probabilités a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Elle se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.*

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Tribu  $T$  sur un univers  $\Omega$ .

Événement, événement contraire, événement «  $A$  et  $B$  », événement «  $A$  ou  $B$  », événements incompatibles, système complet d'événements.

Une probabilité sur  $(\Omega, T)$  est une application  $P$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant (1)  $P(\Omega) = 1$ , (2) pour  $A$  et  $B$  incompatibles,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  et (3) pour  $(A_n)_n$  croissante au sens de l'inclusion  $\lim_n P(A_n) = P(\cup_n A_n)$ . On parle d'espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ .

La notation  $\Omega$  est traditionnelle.

Exemples simples modélisant des situations concrètes où le hasard intervient.

Exemple simple : pour  $\Omega = [[1, n]]$  une probabilité  $P$  est déterminée par la liste  $P(\{k\})$ ,  $k \in [[1, n]]$ . Exemple plus subtil : si  $E$  est un sous-ensemble simple de  $\mathbb{R}^2$  d'aire unité il existe (on l'admet) une probabilité sur  $(E, T)$  vérifiant  $P([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$  pour tout  $[a, b] \times [c, d] \subset E$ . La tribu  $T$  est ici la plus petite tribu qui contient comme éléments tous les  $[a, b] \times [c, d]$  inclus dans  $E$ .

Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de plusieurs événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.

Probabilités conditionnelles

Si  $P(B) > 0$ , la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  est définie par :  $P_B(A) = P(A \cap B)/P(B)$ , notée aussi  $P(A|B)$ .

Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes : si  $A_1, \dots, A_k$  est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si  $B$  est un événement de probabilité non nulle, alors

$$P_B(A_j) = \frac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{\sum_i P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

Couple d'événements indépendants.

Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

## 18. Variables aléatoires discrètes finies

Une application  $X$  définie sur l'univers  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$  telle que pour  $I_1, \dots, I_k$  intervalles de  $\mathbb{R}$  l'image réciproque  $X^{-1}(I_1 \times \dots \times I_k)$  est élément de la tribu  $\mathcal{T}$  est une variable aléatoire.

On se limite ici au cas  $D = X(\Omega)$  est fini. (on parle de variable discrète finie).

Loi  $P_X$  de la variable aléatoire  $X$  : c'est la probabilité sur  $(D, \mathcal{P}(D))$  définie par  $P_X(A) = P(X \in A)$ .

Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.

Loi de BERNOULLI de paramètre  $p$ ,  $p \in [0, 1]$ .

Loi binomiale de paramètres  $n, p$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ .

Espérance d'une variable aléatoire réelle.

L'application  $P_B$  est une probabilité.

Proposer applications issues de la vie courante.

Si  $P(B) > 0$ , l'indépendance de  $A$  et  $B$  s'écrit  $P_B(A) = P(A)$ .

L'indépendance des  $A_i$  deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle si  $n \geq 3$ .

On utilise souvent  $\{X \in A\}$  ou  $(X \in A)$  à la place de  $X^{-1}(A)$ . On écrit donc  $P(X \in A)$ ,  $P(X = x)$ ,  $P(X \leq x)$ .

La condition devient  $(X = x) \in \mathcal{T}$  pour tout  $x \in D$ .

L'application  $P_X$  est déterminée par la donnée des  $P(X = x)$  pour  $x$  élément de  $D$ .

Notation  $\mathcal{B}(p)$ . Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de BERNOULLI et indicatrice d'un événement.

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de  $n$  expériences de BERNOULLI indépendantes.

$$E(X) = \sum_{x \in D} xP\{X = x\}.$$

Relation  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$  dans le cas  $\Omega$  fini.

Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante, de BERNOULLI, binomiale.

Formule de transfert :  $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$ .

L'espérance de  $f(X)$  est déterminée par la loi de  $X$ .

Inégalité de MARKOV.

Moments.

Le moment d'ordre  $k$  de  $X$  est  $E(X^k)$ .

Variance, écart type.

La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion. Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1.

Relation  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ .

Relation  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

Si  $\sigma(X) > 0$ , la variable aléatoire  $(X - E(X))/\sigma(X)$  est centrée réduite.

Variance d'une variable aléatoire de BERNOULLI, d'une variable aléatoire binomiale. Inégalité de BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV.

# Table des matières

## Préambule

Objectifs généraux de formation . . . . .	2
Organisation du texte du programme . . . . .	3
Contenu du programme. . . . .	4
Organisation temporelle de la formation . . . . .	5
Recommandations pédagogiques . . . . .	5

## Première période

1 Vocabulaire de la théorie des ensembles et éléments de logique. . . . .	7
2 Nombres complexes : calculs algébriques et applications géométriques . . . . .	8
3 Systèmes d'équations linéaires . . . . .	9
4 Géométrie élémentaire du plan et de l'espace . . . . .	11
5 Nombres réels. . . . .	13
6 Suites numériques . . . . .	14
7 Fonctions de la variable réelle, limites et continuité. . . . .	15
8 Fonctions de la variable réelle, dérivation . . . . .	17
9 Primitives et équations différentielles linéaires. . . . .	20

## Deuxième partie

10 Développements limités, calcul asymptotique . . . . .	23
11 Courbes paramétrées dans le plan $\mathbb{R}^2$ . . . . .	24
12 Polynômes et fractions rationnelles . . . . .	25
13 Espaces vectoriels et applications linéaires . . . . .	27
14 Matrices . . . . .	31
15 Intégration des fonctions continues sur un segment . . . . .	33
16 Dénombrement . . . . .	35
17 Espaces Probabilisés . . . . .	36
18 Variables aléatoires discrètes finies . . . . .	37