# PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES
# DES CLASSES PRÉPARATOIRES AUX GRANDES ÉCOLES

## Objectifs de formation et organisation du programme de PSI

### Objectifs de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Mathématiques et Physique (PSI) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale d'un futur ingénieur, enseignant ou chercheur. Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une organisation coordonnée entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés et les démonstrations des théorèmes figurant au programme et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes.

Il est attendu que la pratique du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concoure à la formation de l'esprit des étudiants : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

Les étudiants doivent aussi être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les étudiants des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche, de favoriser la mise en avant des concepts mathématiques sous-jacents et de mettre l'accent sur l'interprétation des résultats obtenus ; il favorise ainsi l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles.

Il est aussi souhaité que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

### Organisation du texte du programme

Le programme de deuxième année PSI est organisé en quatre parties (numérotées I, II, III et IV ) ; chaque partie comporte des sections (numérotées 1, 2, ... ) fixant les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme. Les parties I, III et IV traitent de l'analyse et un peu de géométrie différentielle, tandis que la partie II traite de l'algèbre.

### Contenu du programme

En analyse, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite (ou de série) ; il combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle des problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global des suites et des fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Concernant l'étude des solutions des équations, le programme combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, l'accent est mis sur les techniques de majoration.

Le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé et d'application linéaire continue, ce qui permet d'aborder le calcul différentiel et fourni un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes linéaires), l'étude des fonctions de plusieurs variables (en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure. Le programme comporte aussi une introduction aux fonctions holomorphes.

En algèbre, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (dualité, polynômes d'endomorphismes, valeurs propres et sous-espaces propres, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes autoadjoints d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices, ...). Il met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques...) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

## Étalement de la formation

La partie I du programme de deuxième année MP est étudiée complètement en premier lieux et s'il est jugé nécessaire, en parallèle avec des sections de la partie II. Le reste du programme de deuxième année MP est ensuite étudié en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse et de géométrie différentielle d'une part et d'algèbre linéaire et de géométrie euclidienne de l'autre.

## Avertissement

Les quatre parties de ce programme sont organisées en sections suivant un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions au programme de mathématiques dans la filière PSI et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours. Chaque professeur est libre d'adopter la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe ; en revanche, le respect des objectifs de formation et son étalement dans l'année comme indiqués ci-dessus est une nécessité incontournable.

# Programme de la classe de deuxième année PSI

## I - Topologie et calcul différentiel

### 1. Normes et distances, généralités sur les suites

- Norme, distance associée à une norme ; inégalité triangulaire. Espace vectoriel normé (réel ou complexe). Boule ouverte, fermée.
- Exemples : normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^d$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ; norme produit sur le produit d'une famille finie d'espaces vectoriels normés ; norme associée à un produit scalaire.
- Partie bornée, application bornée d'un ensemble dans un espace vectoriel normé. Application lipschitzienne d'une partie d'un espace vectoriel normé dans un espace vectoriel normé ; composée d'applications lipschitzienne.
- Suite bornée, suite convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé, suite divergente ; opérations algébriques sur sur les suites convergentes. Suite extraite, suite extraite d'une suite convergente.
- Comparaison de deux normes ; normes équivalentes ; deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes. Comparaison des normes usuelles sur $\mathbb{K}^d$.

### 2. Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

- Normes usuelles sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie muni d'une base. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (*résultat admis* ).
- Composantes d'une suite dans une base donnée de $E$ ; pour qu'une suite d'éléments de $E$ soit convergente, il faut et il suffit que ses composantes dans une base de $E$ soient convergentes. Suite de Cauchy ; pour qu'une suite d'éléments de $E$ converge, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.
- Relations de comparaison entre suites ; exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe de $f$.
- Ouvert, fermé ; réunion et intersection d'ouverts (resp. fermés). Définition d'un point intérieur, d'un point adhérent ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle d'un point adhérent et d'un fermé. Partie dense. Adhérence d'une boule ouverte.
- Définition d'une partie (séquentiellement) compacte d'un espace vectoriel normé ; pour qu'une partie de $E$ soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit fermée et bornée (*résultat admis*).

### 3. Étude locale, continuité, connexité par arcs

*$E$ et $F$ désignent deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $A$ une partie de $E$.*

- Limite d'une application suivant une partie en un point adhérent à cette partie ; continuité d'une application en un point, prolongement par continuité. Extension de la notion de limite : limite en $\pm\infty$ d'une fonction de la variable réelle, limite infinie d'une fonction à valeurs réelles.
- Limite d'une application composée, opération algébriques sur les limites. Caractérisation d'une application admettant une limite à l'aide de ses composantes dans une base.
- Limite de l'image d'une suite $(u_n)$ admettant une limite $a$ par une application $f$ admettant une limite au point $a$. Caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point.
- Relations de comparaison en un point : domination et négligeabilité pour une fonction $f$ à valeurs dans $F$ et une fonction $\varphi$ à valeurs réelles ne s'annulant pas en dehors du point. Notations $f = O(\varphi)$ et $f = o(\varphi)$.
- Application continue. Une application lipschitzienne est continue. Continuité des opérations algébriques ; continuité d'une application composée, d'une restriction ; continuité des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^d$. Caractérisation de la continuité d'une application à l'aide de ses composantes dans une base. Exemples d'étude de la continuité de fonctions réelles définies sur une partie de $\mathbb{K}^d$.
- Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue sur $E$. Étant donnée une application continue $f$ de $A$ dans $F$, l'image par $f$ d'une partie compacte de $E$ incluse dans $A$ est une partie compacte de $F$. Cas d'une fonction numérique continue sur un compact : existence d'extrémums.

- Connexité par arcs : Chemin à valeurs dans un espace vectoriel normé ; définition d'une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé ; une partie convexe est connexe par arcs. Image d'un connexe par arcs par une application continue. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ; théorème des valeurs intermédiaires.

**4. Continuité des applications linéaires et bilinéaires ; normes subordonnées**

- Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé $(E, N)$ de dimension finie dans un autre $(F, N')$ est lipschitzienne donc continue sur $E$. Norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ subordonnée aux normes $N$ et $N'$ ; propriété de sous-multiplicativité. Norme sur l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à la norme $N$.
- Normes sur $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{K}) \simeq (\mathbb{K}^d)^*$ subordonnées aux normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^d$, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ; normes sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ subordonnées aux normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K})$ ; la norme $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{d^2}$, dite aussi norme de Frobenius (ou de Schur), est sous-multiplicative et majore la norme subordonnée à la norme $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K})$.
- Si $E$, $F$ et $G$ sont de dimension finie, toute application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$ est continue sur $E \times F$. Continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans $E$, du produit scalaire sur un espace euclidien. Continuité de l'application $(u, v) \mapsto uv$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

**5. Fonctions dérivables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie**

*Les fonctions étudiées dans cette section sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel $F$ de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.*

- Dérivabilité d'une application $f$ définie sur $I$ et à valeurs dans $F$ en un point $a$ de $I$ : dérivée, dérivée à droite/ à gauche ; dérivabilité de $f$ sur $I$, application dérivée ; application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.
- Opérations algébriques sur les dérivées ; dérivée d'une application de la forme $u \circ f$ où $u$ est une application linéaire de $F$ dans un espace vectoriel de dimension finie ; dérivée d'une application de la forme $B\,(f, g)$ où $B$ est une application bilinéaire, cas du produit scalaire, du produit matriciel. Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ à valeurs dans $F$, linéarité de la dérivation.
- Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction $f$ à valeurs dans $F$ à l'aide d'une base de $F$, expression des composantes de $Df$ ; cas d'une fonction $f$ à valeurs complexes : pour que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que sa conjuguée $\bar{f}$ le soit, ou encore que $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ le soient. Caractérisation des fonctions constantes sur $I$ parmi les fonctions continues sur $I$ et dérivables sur l'intérieur de $I$.
- Fonctions $n$ fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ à valeurs dans $F$ où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ à valeurs réelles ou complexes. Dérivée $n$-ième d'une application de la forme $B\,(f, g)$ où $B$ est une application bilinéaire ( formule de Leibniz). La composée $f \circ \varphi$ d'une application $f : I \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et d'une application $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $I$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J$. Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $J$ sur $I$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes.
- Définition d'une fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle.

**6. Intégration sur un segment des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie**

- Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment, propriétés usuelles.
- Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. Sommes de Riemann.
- Inégalité de la moyenne.
- Théorème fondamental. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Primitive sur un intervalle d'une fonction continue par morceaux.
- Formule de changement de variable. Formule d'intégration par parties.
- Inégalité des accroissements finis. Théorème de prolongement d'une application dérivable ; extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale ; inégalité de Taylor-Lagrange. Existence d'un développement limité à l'ordre $k$ pour une application de classe $\mathcal{C}^k$ : formule de Taylor-Young.

**7. Fonctions différentiables de plusieurs variables réelles**

– Différentiabilité d'une application $f$ d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ en un point $a$ de $U$, différentielle $df(a)$ (ou $df_a$, $Df(a)$, $f'(a)$) de $f$ en $a$ ; dérivée $D_v f(a)$ de $f$ en $a$ suivant un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$, dérivées partielles, matrice jacobienne, jacobien (n=p) ; opérations algébriques sur les applications différentiables, composition d'applications différentiables ; vecteur tangent à l'image par $f$ d'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans $U$ passant par $a$.
– Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(U;\mathbb{R}^p)$, caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$. Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.
– Forme différentielle $df$ d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ; gradient de $f$ relativement à la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ ; interprétation géométrique du gradient.
– Si $f$ et $g$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, leur composée $g \circ f$ l'est aussi. Définition d'un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ ; caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$ (*résultat admis*).
– Inégalité des accroissements finis dans un ouvert convexe ; caractérisation des applications constantes sur un ouvert convexe ou connexe par arcs.
– Point critique (ou stationnaire) d'une application $f$ différentiable sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles ; extrémums ; condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
– Dérivées partielles d'ordre supérieur ; espace vectoriel $\mathcal{C}^k(U;\mathbb{R}^p)$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Théorème de Schwarz (*admis*). Laplacien.
– Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Condition suffisante d'existence d'un extremum local ; condition suffisante pour qu'un extremum local soit un minimum (ou un maximum) strict ; point col (ou selle) ; position d'une surface par rapport au plan tangent en un point.
– Théorème des fonctions implicites pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à deux ou trois variables et à valeurs réelles (*admis*). Application aux extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.
– Champs de vecteurs du plan et de l'espace, divergence, rotationnel.

# II - Algèbre

*Dans cette partie, le corps de base $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$*

**1. Rappels et compléments sur les espaces vectoriels et les applications linéaires**

– Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe ; caractérisation d'une somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires ; projections, symétries.
– Toute application linéaire de $E$ dans $F$ définit un isomorphisme de tout supplémentaire de son noyau sur son image. Théorème du rang ; caractérisation des isomorphismes par le rang ; invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Application à la détermination des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ prenant des valeurs données sur une famille finie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts ; polynômes d'interpolation de Lagrange.
– Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels de $E$ ; famille finie de sous-espaces vectoriels en somme directe ; caractérisation par la dimension d'une somme directe finie de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Lorsque $E$ est somme directe d'une famille finie $E_1, \dots, E_s$ de sous-espaces vectoriels, définition de la famille $p_1, \dots, p_s$ des projecteurs associés à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$.
– Définition d'une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel $F$ de $E$, à une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$ d'une famille finie $E_1, \dots, E_s$ de sous-espaces vectoriels de $E$.
– Somme et produit matriciel par blocs (on se limitera à quatre blocs).
– En dimension finie, représentation matricielle dans une base de $E$ d'une famille finie de vecteurs de $E$, d'une famille finie de formes linéaires sur $E$ ; représentation matricielle dans des bases de $E$ et de $F$ d'une application linéaire de $E$ dans $F$. Formules de changement de bases ; matrices semblables, classe de similitude d'une matrice.

- Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace ; relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ ; deux matrices carrées semblables ont la même trace. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ; la trace d'un projecteur est égale à son rang.
- Opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice, matrices élémentaires ; matrice échelonnée ; interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels. Formulation matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice échelonnée réduite $E$ uniquement déterminée et une suite finie de matrices élémentaires $P_1, \ldots, P_N$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $E = P_N \cdots P_1 M$.
  Application à la détermination du rang d'une matrice et au calcul de l'inverse d'une matrice carrée.

### 2. Dualité en dimension finie

- Formes linéaires sur un espace vectoriels $E$, dual $E^*$ de $E$.
- Hyperplan ; si $\varphi$ est une forme linéaire non nulle sur $E$, son noyau est un hyperplan de $E$ et toute forme linéaire nulle sur $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est colinéaire à $\varphi$ ; hyperplans indépendants ; l'intersection de $k$ hyperplans est un sous-espace vectoriel de codimension inférieure ou égale à $k$, avec égalité si et seulement si les hyperplans sont indépendants. En dimension finie, équation cartésienne d'un hyperplan.
- Système de coordonnées sur $E$ dans le cas où $E$ est de dimension finie ; tout système de coordonnées sur $E$ est une base de $E^*$ ; réciproquement, toute base de $E^*$ est un système de coordonnées sur $E$ ; bases duales.
- Systèmes d'équations linéaires ; sous-variétés affines de $E$ ; équations paramétriques, implicites d'une sous-variété affine de $E$ dans une base donnée.

### 3. Sous-espaces stables, polynômes d'endomorphisme

- Sous-espace vectoriel $F$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ stable par un endomorphisme $u$ de $E$, endomorphisme $u_F$ de $F$ induit par $u$. Somme et intersection de sous-espaces $u$-stables. Si $v$ est un endomorphisme de $E$ commutant avec $u$, $\mathrm{Ker}\,v$ et $\mathrm{Im}\,v$ sont $u$-stables. En dimension finie, caractérisation des endomorphismes stabilisant un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ par leur matrice dans une base de $E$ adaptée à $F$ ; caractérisation des endomorphismes stabilisant des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_s$ de $E$ tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$ par leur matrice dans une base de $E$ adaptée à cette décomposition de $E$.
- Définition d'un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ ; structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ ; polynômes premiers entre eux, théorème de Bezout. La donnée d'un endomorphisme $u$ de $E$ définit un morphisme $P \longmapsto P(u)$ de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Noyau et image de ce morphisme ; idéal des polynômes annulateurs de $u$. idéal des polynômes annulateurs d'une matrice carrée. En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non nul ; toute matrice carrée admet un polynôme annulateur non nul.
- Théorème de décomposition des noyaux.

### 4. Réduction des endomorphismes

- Polynôme caractéristique $\chi_A$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ ; une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude ; en dimension finie, polynôme caractéristique $\chi_u$ d'un endomorphisme $u$ de $E$. Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs $\left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ est égal au produit de $\chi_A$ et $\chi_B$ ; en particilier, si $F$ est un sous-espace vectoriel $u$-stable de $E$, le polynôme caractéristique de $u_F$ divise $\chi_u$ . Théorème de Cayley-Hamilton (*admis*).
- Vecteur propre, valeur propre de $u$ ; sous-espace propre de $u$ associé à une valeur propre. Des sous-espaces propres de $u$ associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, distinctes deux à deux, sont en somme directe.
- Étant donné un polynôme $P$ de $\mathbb{K}[X]$, pour toute valeur propre $\lambda$ de $u$, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$, en particulier, les valeurs propres de $u$ sont racines de tout polynôme annulateur de $u$ ; éléments propres des homothéties, des projecteurs, des symétries.
- En dimension finie, les racines du polynôme caractéristique de $u$ sont les valeurs propres de $u$ ; multiplicité d'une valeur propre $\lambda$ de $u$ ; si le polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de $u$ comptées avec leur multiplicité sont égaux à la trace et au déterminant de $u$ respectivement ; le sous-espace propre associé à une valeur propre $\lambda$ est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de $\lambda$.
- Éléments propres d'une matrice carrée ; spectre d'une matrice, d'un endomorphisme.

- Endomorphisme trigonalisable en dimension finie, matrice carrée trigonalisable. Un endomorphisme $u$ de $E$ est trigonalisable si et seulement son polynôme caractéristique est scindé. Toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Endomorphisme diagonalisable en dimension finie, matrice carrée diagonalisable. Décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable $u$ dont les sous-espaces propres sont $F_1, \ldots, F_s$ : $u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_s p_s$ où $(p_1, \ldots, p_s)$ est la famille des projecteurs associés à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$ et $F_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i)$ ; pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = P(\lambda_1)p_1 + \cdots + P(\lambda_s)p_s$. Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité : la somme des sous-espaces propres de $u$ est égale à $E$ ; le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de tout sous-espace propre de $u$ est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante ; il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé à racines simples.
- Si $u$ est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ stable par $u$, l'endomorphisme de $F$ induit par $u$ l'est aussi. Tout endomorphisme (resp. toute matrice) dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
- Lorsque $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est diagonalisable, $M$ s'écrit sous la forme $QDQ^{-1}$, où $D$ est diagonale et où $Q$ désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de $M$. Cas des matrices trigonalisables.
- Application à l'étude sur des exemples du comportement des puissances $n$-ième d'une matrice. Application à l'étude des suites numériques satisfaisant à des relations de récurrence linéaire à coefficients constants.

**5. Formes bilinéaires symétriques, produits scalaires, espaces euclidiens et hermitiens**

- Forme bilinéaire symétrique, forme quadratique sur $E$ ; identités de polarisation ; forme quadratiques positives, définies positives, inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas des formes définies positives. Expressions algébriques et matricielle d'une formes bilinéaire symétrique en dimension finie, cas des formes quadratiques. Formule de changement de bases.
- Produits scalaires, espaces euclidien et hermitien.
  Produit scalaire réel ou complexe (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; espace préhilbertien réel ou complexe $E$. Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme et distance sur $E$ ; identités de polarisation ; identité du parallélogramme. Famille orthogonale, orthonormale de vecteurs ; théorème de Pythagore. Orthogonalisation d'une suite libre de vecteurs : algorithme de Gram-Schmidt. Orthogonal $F^\perp$ (ou $F^\circ$) d'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ ; sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels, projecteur orthogonal ; tout sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal qui n'est que son orthogonal. Existence d'une base orthonormale si $E$ est de dimension finie (euclidien ou hermitien), complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale ; expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points. Expression de la projection orthogonale d'un vecteur $x$ de $E$ sur un sous-espace vectoriel de dimension finie $F$ de $E$ lorsque $F$ est muni d'une base orthonormale ; cas où $F$ est une droite ou un hyperplan en dimension finie.
- Endomorphisme remarquables d'un espaces euclidiens.
  Isomorphisme canonique d'un espace euclidien $E$ de dimension $n$ sur son dual $E^*$. Adjoint $u^*$ d'un endomorphisme $u$ de $E$, noyau et image de $u^*$, matrice de $u^*$ dans une base orthonormale, $\sqrt{\|u^*u\|} = \|u\| = \|u^*\|$ où $\| \quad \|$ est la norme subordonnée à la norme de $E$ ; un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est $u$-stable si et seulement si $F^\perp$ est $u^*$-stable. Endomorphisme symétrique (ou autoadjoint), antisymétrique ; caractérisation des projecteurs autoadjoints. Automorphisme orthogonal ; symétrie orthogonale, réflexion ; groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ ; rotation de $E$, groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$ ; groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Matrice de Gram $G$ d'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ d'éléments de $E$ ; $G = {}^tAA$ où $A$ est la matrice de $(v_1, \ldots, v_p)$ dans une base orthonormale de $E$ ; $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_p)$ ; déterminant de Gram $\det G$ de $(v_1, \ldots, v_p)$, interprétation géométrique de $\sqrt{\det G}$ ; meilleure solution approchée au sens quadratique du système d'équations linéaires $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dans le cas où $\operatorname{rg} A = p$. Matrice symétrique positive, définie positive ; une matrice symétrique $G$ est définie positive si et seulement si elle est la matrice de Gram d'une base de $E$ ; factorisation $QR$ d'une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Réduction des endomorphismes autoadjoints
  Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$ est diagonalisable dans une base

orthonormale ; toute matrice carrée symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable. Endomorphisme autoadjoint associé à une forme quadratique sur $E$ ; réduction de cette forme dans une base orthonormale de $E$. Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif ; cas des matrices réelles symétriques.

# III - Suites et séries de fonctions - Intégrales avec paramètre

### 1. Séries de nombres réels ou complexes, séries dans un espace de dimension finie

- Espace vectoriel des séries à termes réels ou complexes ; suite des sommes partielles d'une série. Sous-espace vectoriel des séries convergentes ; somme, suite des restes d'une série convergente. Critère de convergence d'une série géométrique.
- Série absolument convergente ; toute série absolument convergente est convergente.
- Séries à termes positifs : principe de comparaison, comparaison logarithmique, critères de d'Alembert. Comparaison de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ positive, continue et décroissante. Séries de Riemann. Sommation des relations de comparaison.
- Critère de Leibniz pour les séries alternées, signe et majoration du reste.
- Produit de Cauchy de deux séries ; si deux séries sont absolument convergentes, leur série produit converge absolument et sa somme est égal au produit des sommes des deux séries en question. Exponentielle complexe.
- Série convergente à termes dans un espace vectoriel de dimension finie ; série absolument convergente ; toute série absolument convergente est convergente.
  Algèbre (normée) de dimension finie ; produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes ; série de Neumann ; application à la localisation du spectre d'une matrice ; le groupe $\mathcal{U}$ des éléments inversibles d'une algèbre de dimension finie $\mathcal{A}$ est ouvert ; continuité sur $\mathcal{U}$ de l'application $a \mapsto a^{-1}$. Application exponentielle exp dans une algèbre de dimension finie $\mathcal{A}$ ; si $a$ et $b$ commutent dans $\mathcal{A}$, alors $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

### 2. Suites et séries de fonctions

- Convergence simple d'une suite ou d'une série d'applications d'un ensemble $X$ dans un espace de dimension finie $F$.
- Convergence uniforme d'une suite ou d'une série d'applications de $X$ dans $F$. Condition de Cauchy uniforme. Espace de Banach $\mathcal{B}(X;F)$ des applications bornées de $X$ dans $F$ muni de la norme de la convergence uniforme. Critère suffisant d'uniforme convergence d'une série de fonctions : convergence normale.
- Théorème d'interversion des limites dans le cas où $X$ est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ; continuité de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) uniformément convergente d'applications continues. Dans le cas où $X$ est compact, espace de Banach $\mathcal{C}(X;F)$ des applications continues de $X$ dans $F$ muni de la norme de la convergence uniforme.
- Norme de la convergence en moyenne $f \longmapsto N_1(f) = \int_a^b |f|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes.
  La convergence uniforme de $(f_n)$ sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne et on a $\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$. Application à l'intégration terme à terme d'une série d'applications continues. Cas où la convergence est normale.
- Dérivation de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ; espace de Banach $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$ muni de la norme $f \mapsto \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$.
- Produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_a^b \bar{f}g$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme de la convergence en moyenne quadratique $f \longmapsto \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$ ; la convergence uniforme de $(f_n)$ sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.

### 3. Séries entières

– Séries entières dans le domaine complexe.
Rayon, disque (ouvert) de convergence d'une série entière à coefficients complexes. Lemme d'Abel : une série entière de disque de convergence $D$ est normalement convergente sur tout compact de $D$ ; la somme de la série entière est continue sur $D$. Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières ; linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy. Inégalités de Cauchy. Série entière dérivée.
– Séries entières dans le domaine réel.
Intervalle (ouvert) de convergence d'une série entière ; la somme de la série entière d'intervalle de convergence $I$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ ; dérivation et intégration terme à terme. Fonction $f$ à valeurs complexes définie sur un intervalle $I$ développable en série entière en un point $a$ de $I$ ; développement de Taylor. Développement en série entière autour de 0 des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto e^x$, cos, sin, cosh, sinh et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, où $\alpha$ est réel.
– Exemples d'emploi des séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

### 4. Séries de Fourier

– Premier et second théorèmes d'approximation polynomiale de Weierstrass.
– Suites des coefficients de Fourier d'une fonction $T$-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et continue par morceaux (sous forme trigonométrique $\big(a_n(f)\big)_{n\geqslant 0}$, $\big(b_n(f)\big)_{n\geqslant 1}$ et sous forme complexe $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$), relation entre les coefficients de Fourier sous forme complexe et les coefficients de Fourier sous forme trigonométrique. Série de Fourier donnée sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle ( série à double entrée), sommes partielles de la série de Fourier d'une telle fonction.
– Coefficients de Fourier de $\bar{f}$ ; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de $t \longmapsto f(-t)$ ; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de $t \longmapsto f(t+a)$. Coefficients de Fourier d'une dérivée : si $f$ est $2\pi$-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $c_n(f') = in\, c_n(f)$. Extension au cas où $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.
– Les suites $\big(a_n(f)\big)_{n\geqslant 0}$, $\big(b_n(f)\big)_{n\geqslant 1}$, $\big(c_n(f)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(c_{-n}(f)\big)_{n\geqslant 1}$ tendent vers 0.
– Espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ des applications $2\pi$-périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $(.|.)$ : $(f,g) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(t)g(t)\ dt$ ; norme associée à ce produit scalaire. Dans cet espace préhilbertien, la famille de fonctions $t \longmapsto \cos(nt)$ et $t \longmapsto \sin(n't)$, $(n,n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, est orthogonale ; les fonctions $e_n : t \longmapsto e^{int}$, où $n$ parcourt $\mathbb{Z}$, forment une famille orthonormale, et on a $c_n(f) = (e_n|f)$ ; la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la série de Fourier de $f$, notée $S_n(f)$, est la projection orthogonale de $f$ sur le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_p)_{-n\leqslant p\leqslant n}$. Inégalité de Bessel.
– Théorème de Parseval : convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier d'une fonction périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
– Convergence normale : Lorsque $f$ est $2\pi$-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, les sommes $\sum\limits_{n=-p}^{p} |(c_n(f)|$ sont majorées. Dans ces conditions, les sommes partielles de la série de Fourier de $f$ convergent uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$ ; en particulier, pour tout nombre réel $x$, la série de Fourier de $f$ converge en ce point, et sa somme est égale à $f(x)$.
– Théorème de Dirichlet : convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (*démonstration non exigible*).

### 5. Fonctions holomorphes

– Dérivation complexe, fonction holomorphe sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$. Équations de Cauchy-Riemann, interprétation géométrique. Exemple des fonctions analytiques sur $U$. Fonctions usuelles.
– Développement de Taylor en un point d'une fonction holomorphe ; toute fonction holomorphe est analytique.
– Principe des zéros isolés.

### 6. Intégration des fonctions continue par morceaux sur un intervalle quelconque

– Définition d'une fonction continue par morceaux, à valeurs réelles ou complexes, définie sur un intervalle quelconque. Opérations sur les fonctions continues par morceaux.

– Définition d'une primitive d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque. Définition d'une intégrale impropre (ou généralisée) convergente. Intégrale divergente.
– Intégrale absolument convergente, fonction intégrable (ou sommable) sur un intervalle. Une intégrale absolument convergente est convergente. Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne.
– Principe de comparaison pour les fonctions positives. Étude de l'intégrabilité sur $]0,1]$ ou sur $[1,+\infty[$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $x \mapsto x^p$ $(p \in \mathbb{R})$, $x \mapsto |\ln x|$.
– Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque. Techniques d'intégration par parties. Exemples d'étude d'intégrales semi-convergentes.
– Les fonctions continues et intégrables sur $I$ à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$ ; norme de la convergence en moyenne $f \longmapsto N_1(f) = \int_I |f|$. Fonction continue à valeurs complexes $f$ de carré intégrable sur $I$ ; ces fonctions constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$. Le produit de deux fonctions continues et de carré intégrable sur $I$ est intégrable sur $I$. L'application $(f,g) \mapsto (f|g) = \int_I \bar{f}g$ est un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}$.
– Théorème de convergence dominée (admis) : Soit $(f_n)$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur $I$. Si $(f_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$ continue par morceaux sur $I$ et s'il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur $I$, telle que pour tout entier $n$, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors $f$ est intégrable sur $I$ et $\int_I f = \lim \int_I f_n$.
– Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions (admis) : Soit $(f_n)$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur $I$, telle que la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers une fonction $f$ continue par morceaux sur $I$ et telle que la série $\sum_n \int_I |f_n|$ converge. Alors $f$ est intégrable sur $I$ et $\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

### 7. Intégrales avec paramètre

– Continuité, dérivation d'une fonction définie par une intégrale sur un segment avec paramètre.
– Continuité, dérivation d'une fonction définie par une intégrale avec paramètre : théorèmes dérivant du théorème de convergence dominée. Formule de Leibniz ; extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
– Fonction $\Gamma$ sur la demi-droite $]0,\infty[$ : intégrale eulérienne de seconde espèce, équation fonctionnelle, formule d'Euler-Gauss, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), formule de Stirling.
– Transformée de Laplace $Lf$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, causale et vérifiant une estimation de la forme $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$ avec $C \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}$ ; $Lf$ est définie et holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > a\}$. Transformée de Laplace des fonctions $t \mapsto Y(t)t^n e^{ct}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{C}$, $t \mapsto Y(t)\cos\omega t$, $t \mapsto Y(t)\sin\omega t$, $t \mapsto Y(t)\cosh\omega t$, $t \mapsto Y(t)\sinh\omega t$ avec $\omega \in \mathbb{R}$, $t \mapsto Y(t)t^\nu$ avec $\nu \in \mathbb{R}_+$. Transformée de Laplace de $t \mapsto e^{ct}f(t)$ avec $c \in \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t-\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(\lambda t)$ avec $\lambda > 0$ ; transformée de Laplace d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux ; transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions. Propriété d'injectivité.
Applications à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

## IV - Équations différentielles - Géométrie différentielle

### 1. Équations différentielles non linéaires

– Systèmes différentiels autonomes du premier ordre en dimension 2.
Courbe intégrale $\gamma$ d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ; interprétation cinématique ; courbe intégrale maximale ; système différentiel autonome du premier ordre associé. Invariance par translation des temps. Problème de Cauchy associé à la condition initiale $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ avec $(x_0, y_0) \in U$. Théorème de Cauchy : existence et unicité locale d'une solution du problème de Cauchy. Existence et unicité d'une solution maximale $\gamma_{\max} : ]\omega_-, \omega_+[ \to U$ du problème de Cauchy ; toute solution du problème de Cauchy est la restriction de $\gamma_{\max}$ à un sous-intervalle de $]\omega_-, \omega_+[$. Les images des courbes intégrales maximales (ou orbites) de $\boldsymbol{v}$ forment une partition de $U$.
– Équations différentielles scalaires du premier ordre.
Solution d'une équation $y' = f(x,y)$, où $f$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ;

solution maximale, maximale à droite. Problème de Cauchy associé à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ avec $(x_0, y_0) \in U$ ; problème de Cauchy équivalent associé au champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (1, f)$ sur $U$. Théorème de Cauchy : existence et unicité locale des solutions du problème de Cauchy. Existence et unicité d'une solution maximale $y_{\max} : ]\omega_-, \omega_+[ \to \mathbb{R}$ du problème de Cauchy ; toute solution du problème de Cauchy est la restriction de $y_{\max}$ à un sous-intervalle de $]\omega_-, \omega_+[$. Condition nécessaire pour qu'une solution de l'équation $y' = f(x, y)$ soit maximale à droite dans le cas où $U = I \times \mathbb{R}$, $I$ étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ; définition d'une solution globale.

- Équations différentielles à variables séparables.
  Étude du problème de Cauchy pour une équation de la forme $y' = f(x)g(y)$, où $f$ et $g$ sont des fonctions réelles continues définies sur des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ ; solutions singulières. Équations différentielles homogènes.

### 2. Équations différentielles linéaires

- Systèmes différentiels linéaires du premier ordre.
  Solution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$, où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sont des applications continues sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ ; solution globale. Théorème de Cauchy : existence et unicité d'une solution globale du problème de Cauchy, unicité locale des solutions. Système différentiel linéaire homogène $X' = AX$ associé ; structure de l'ensemble des solutions. Cas des systèmes différentiels réels. Système fondamental de solutions du système différentiel $X' = AX$, matrice fondamentale, wronskien, formule de Liouville. Méthode de la variation des constantes.
- Systèmes différentiels linéaires autonomes du premier ordre.
  Résolution du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX + B$, où $A$ est une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une application continue, par trigonalisation de $A$. Matrice fondamentale $t \mapsto \exp(tA)$ du système différentiel linéaire homogène associé $X' = AX$, solution $t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$ du problème de Cauchy $X' = AX$, $X(t_0) = X_0$. Exemples de calcul de $\exp(A)$ ; déterminant de $\exp(A)$. Interprétation d'un endomorphisme $v$ d'un espace vectoriel réel ou complexe $E$ de dimension finie comme un champ de vecteurs linéaire sur $E$ ; expression intrinsèque d'un système différentiel linéaire homogène autonome du premier ordre. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $v$ et si $\gamma : \mathbb{R} \to E$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs $v$ passant par un point de $F$, alors l'image $\gamma(\mathbb{R})$ de $\gamma$ est contenue dans $F$ ; application au cas où $v$ est diagonalisable.
- Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients variables.
  Problème de Cauchy pour une équation de la forme $x" + ax' + bx = c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ : existence et unicité d'une solution globale, unicité des solutions. Structure de l'ensemble des solutions. Système fondamental de solutions de l'équation homogène $x" + ax' + bx = 0$, wronskien. Méthode de la variation des constantes, condition de Lagrange. Réduction de l'équation homogène connaissant une solution ne s'annulant pas.

### 3. Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Courbe paramétrée ou chemin $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{R}^d$ ; changement de paramétrage, chemins $\mathcal{C}^k$-équivalents, $\mathcal{C}^k$-équivalents avec même orientation. Chemin de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Chemin fini, simple. Point régulier $t_0 \in I$ de $\gamma$, vecteur tangent $\gamma'(t_0)$ ; chemin régulier. Deux chemins finis, simples et réguliers de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^d$ sont $\mathcal{C}^k$-équivalents si et seulement s'ils ont même image.
- Courbe régulière $C$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, sans point critique sur $C$. Existence d'un paramétrage local de $C$ en tout point $a$ de $C$. Vecteur tangent à $C$ en $a$, ensemble $T_aC$ des vecteurs tangents à $C$ en $a$ ; $T_aC$ est le noyau de la différentielle de $f$ en $a$, équation de la droite tangente $a + T_aC$ à $C$ en $a$.
- Surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$, point régulier, plan tangent, normale.
- Surface régulière $S$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, sans point critique sur $S$. Existence d'un paramétrage local de $S$ en tout point $a$ de $C$. Vecteur tangent à $S$ en $a$, ensemble $T_aS$ des vecteurs tangents à $S$ en $a$ ; $T_aS$ est le noyau de la différentielle de $f$ en $a$, équation du plan tangent $a + T_aS$ à $S$ en $a$ ; normale à $S$ en $a$.
- Réduction d'une fonction polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}^3$ ; équation réduite des coniques dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et des quadriques dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

### 4. Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

- Rotations et réflexions linéaires de $\mathbb{R}^2$ ; morphisme de groupe canonique de $\mathbb{R}$ sur SO(2). Tout déplacement de $\mathbb{R}^2$ est soit une translation, soit une rotation affine.
- Rotations, symétries orthogonales, réflexions linéaires. Rotation $r_{e,\theta}$ d'axe porté et orienté par un vecteur unitaire $e$ et d'angle orienté $\theta$ ; interprétation géométrique de la formule de Rodrigues $r_{e,\theta} = \exp(\theta a_e)$ où $a_e$ est l'endomorphisme $v \mapsto e \times v$ de $\mathbb{R}^3$ ; théorème d'Euler, détermination de l'axe et de l'angle orientés d'une rotation donnée par sa matrice dans la base canonique. Tout déplacement de $\mathbb{R}^3$ est soit une translation, soit une rotation affine, soit un vissage.
- Abscisses curvilignes associées à un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$, longueur d'un chemin fini, chemin normal; tout chemin régulier de classe $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$-équivalent à un chemin normal.
- Repère de Frenet associé à une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$ régulière dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ ; formules de Frenet, courbure, rayon de courbure en un point birégulier.

### 5. Primitivation d'une forme différentielle de degré 1

- Forme différentielle de degré 1 $\omega$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^d$, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- Primitive sur $U$ d'une 1-forme différentielle $\omega$ continue; 1-forme différentielle exacte. Intégrale d'une 1-forme différentielle continue suivant un chemin fini $\gamma$ dans $U$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Une 1-forme continue $\omega$ est exacte si et seulement si l'intégrale de $\omega$ suivant tout lacet dans $U$ est nulle.
- 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ fermée. Lemme de Poincaré : toute 1-forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé est exacte.
- Champ de vecteurs $X$ sur $U$ associé à une 1-forme différentielle $\omega$ continue moyennant la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^d$. Circulation de $X$ suivant un chemin fini $\gamma$ dans $U$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
- Une application de classe $\mathcal{C}^1$ $z \mapsto f(z) = p(x,y) + iq(x,y)$ d'un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe si et seulement si les 1-formes différentielles $p\,dx - q\,dy$ et $q\,dx + p\,dy$ sont fermées. Primitive sur un ouvert $U$ d'une fonction holomorphe; si l'ouvert $U$ est étoilé, toute fonction holomorphe sur $U$ admet une primitive sur $U$.
- Définition du logarithme principal Log sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ; pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$ ; développement en série entière de $\mathrm{Log}\,(1+z)$. L'argument principal est une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de la 1-forme différentielle $(x^2+y^2)^{-1}(x\,dy - y\,dx)$. Théorème de relèvement d'un chemin de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{C}^*$, avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

### 6. Intégrales doubles et triples, aires et volumes

- Formule de Fubini : expressions de l'intégrale double sur un rectangle à l'aide de deux intégrations successives.
- Domaine élémentaire, simple du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Intégrale sur un domaine simple (rectangles, secteurs circulaires...) $D$ d'une fonction continue $f : D \to \mathbb{C}$ ; aire de $D$.
- Formule de changement de variables dans une intégrale double; cas du passage en coordonnées polaires. Formule de Green sur un domaine élémentaire.
- Extension aux intégrales triples.