Programme des classes de mathématiques spéciales MP

I - Topologie et calcul différentiel

1. Notion de convergence dans un espace vectoriel normé

- Semi-norme, norme, distance associée à une norme ; inégalité triangulaire. Espace vectoriel normé (réel ou complexe). Boule ouverte, fermée.
- Partie bornée, application bornée d'un ensemble dans un espace vectoriel normé E. Application lipschitzienne d'une partie dde E dans un espace vectoriel normé F.
- Normes $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_1$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$; norme produit sur le produit d'une famille finie d'espaces vectoriels normés.
- Voisinage, ouvert, fermé. Point intérieur, point adhérent ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Partie dense.
- Adhérence d'une boule ouverte.
- Suite convergente à valeurs dans E. Suites extraites d'une suite convergente. Valeurs d'adhérence d'une suite. Caractérisation séquentielle d'un fermé et de l'adhérence d'une partie.
- Limite d'une application d'une partie X de E dans F en un point adhérent à X ; continuité en un point. Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite. Extension de la notion de limite : limite en $\pm\infty$ d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans F, limite infinie d'une application de X dans $\mathbb{R}$ en un point adhérent à X. Relations de comparaison.
- Caractérisation de la convergence dans un espace produit.
- Application continue. Ouvert, fermé relatif à une partie. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue. Une application lipschitzienne est continue.
- Continuité des opérations algébriques. Limites et continuité d'une application composée. Continuité des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^d$.
- Étude de la continuité de fonctions réelles définies sur une partie de $\mathbb{R}^d$.

2. Topologie dans $\mathbb{R}^d$

- Complétude.
  Suites de Cauchy dans un espace vectoriel normé ; toute suite convergente est de Cauchy. Définition d'un espace vectoriel normé complet (espace de Banach). $\mathbb{R}^d$ est complet. Théorème de prolongement d'une application lipschitzienne.
- Compacité.
  Valeur d'adhérence d'une suite ; définition d'une partie (séquentiellement) compacte d'un espace vectoriel normé ; toute partie compacte est fermée et bornée ; toute partie fermée d'une partie compacte est compacte. Le produit d'une famille finie de compacts est un compact. Image d'un compact par une application continue. Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ possède une valeur d'adhérence ; pour qu'une partie de $\mathbb{R}^d$ soit compacte, il suffit qu'elle soit fermée et bornée.
- Connexité par arcs.
  Chemin à valeurs dans un espace vectoriel normé ; définition d'une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé ; une partie convexe est connexe par arcs. Image d'un connexe par arcs par une application continue. Théorème des valeurs intermédiaires : toute partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
- Normes équivalentes ; des normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes, les mêmes ouverts et les mêmes suites de Cauchy. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet ; extension du théorème de Bolzano-Weierstrass.

3. Normes subordonnées

– Caractérisation de la continuité d'une application linéaire d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F ; si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue. Norme subordonnée sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E;F)$ des applications linéaires continues de E dans F. Propriété de sous-multiplicativité.
– Normes sur $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{K}) \simeq (\mathbb{K}^d)^*$ subordonnées aux normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^d$, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; normes sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ subordonnées aux normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K})$; la norme $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est sous-multiplicative et majore la norme $|\!|\!| \ |\!|\!|_2$ subordonnée à la norme $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K})$; $\sqrt{|\!|\!|A^*A|\!|\!|_2} = |\!|\!|A|\!|\!|_2 = |\!|\!|A^*|\!|\!|_2$ pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.
– Caractérisation de la continuité d'une application bilinéaire ; si E et F sont de dimension finie, toute application bilinéaire définie sur $E \times F$ est continue.

4. Fonctions différentiables de plusieurs variables réelles

– Dérivabilité d'une application f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach en un point a de I ; espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I;E)$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Formule de Leibniz générale. Inégalité des accroissements finis. Théorème de prolongement d'une application dérivable.
– Différentiabilité d'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ en un point a de U, différentielle $df(a)$ (ou df_a, $Df(a)$, $f'(a)$) de f en a ; dérivée $D_v f(a)$ de f en a suivant un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$, dérivées partielles, matrice jacobienne ; composition d'applications différentiables ; vecteur tangent à l'image par f d'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans U passant par a.
– Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(U;\mathbb{R}^p)$, caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$.
– Forme différentielle df d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$; gradient de f relativement à la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$; interprétation géométrique du gradient.
– Inégalité des accroissements finis dans un ouvert convexe ; caractérisation des applications constantes sur un ouvert connexe par arcs ; point critique (ou stationnaire).
– Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(U;\mathbb{R}^p)$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Théorème de Schwarz.

5. Théorème des fonctions implicites

– Théorème des fonctions implicites pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs réelles.
– Théorème d'inversion locale, caractérisation d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme global.

6. Extrema des fonctions réelles

– Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$.
– Décomposition en carrés d'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$. Théorème d'inertie de Sylvester, signature d'une forme quadratique.
– Condition suffisante pour qu'un extremum local soit un minimum (ou un maximum) strict, cas particulier où $n = 2$, point col (ou selle).
– Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

II - Algèbre

1. Dualité en dimension finie

– Dual E^* d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou des nombres complexes, forme bilinéaire canonique $\langle \ , \ \rangle$ sur $E^* \times E$ (crochet de dualité).
– Sous-espace vectoriel de codimension finie ; application linéaire de rang fini, théorème du rang. Hyperplans indépendants ; l'intersection de k hyperplans est un sous-espace vectoriel de codimension inférieure ou égale à k, avec égalité si et seulement si les hyperplans sont indépendants.
– Système de coordonnées sur E dans le cas où E est de dimension finie ; tout système de coordonnées sur E est une base de E^* ; réciproquement, toute base de E^* est un système de coordonnées sur E ; bases duales.

– Systèmes d'équations linéaires ; sous-variétés affines de E ; équations paramétriques, implicites d'une sous-variété affine de E dans une base donnée.
– En dimension finie, représentation matricielle dans une base de E d'une famille finie de vecteurs de E, d'une famille finie de formes linéaires sur E ; représentation matricielle dans des bases de E et de F d'une application linéaire de F dans E. Formules de changement de bases. Utilisation de l'algorithme de Gauss.
– Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ des formes bilinéaires sur $E \times F$; $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}(F; E^*)$. En dimension finie, matrice d'une forme bilinéaire, formule de changement de bases.
– Forme bilinéaire symétrique, forme quadratique sur E ; identités de polarisation ; notion d'orthogonalité dans un espace vectoriel E muni d'une forme quadratique. En dimension finie, rang d'une forme quadratique q sur E (ou de forme bilinéaire symétrique associée) ; une forme quadratique q non dégénérée induit un isomorphisme canonique de E sur E^* ; existence d'une base q-orthogonale ; algorithme de Gauss pour la décomposition en carrés d'une forme quadratique.

2. Produits scalaires, espaces euclidiens

– Produits scalaires.
Produit scalaire réel ou complexe (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; espace préhilbertien réel ou complexe E. Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme et distance sur E ; identités de polarisation ; identité du parallélogramme. Famille orthogonale, orthonormale de vecteurs ; théorème de Pythagore. Orthogonalisation d'une suite libre de vecteurs : algorithme de Gram-Schmidt. Orthogonal $F^\perp$ (ou F°) d'un sous-espace vectoriel F de E ; sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteur orthogonal ; tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal. Existence d'une base orthonormale si E est de dimension finie (euclidien ou hermitien), complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.
– Espaces euclidiens.
Isomorphisme canonique d'un espace euclidien E de dimension n sur son dual E^*. Adjoint u^* d'un endomorphisme u de E, noyau et image de u^*, matrice de u^* dans une base orthonormale. Endomorphisme symétrique (ou autoadjoint), antisymétrique ; caractérisation des projecteurs autoadjoints. Automorphisme orthogonal ; symétrie orthogonale, réflexion ; groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$; rotation de E, groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$; groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Matrice de Gram G d'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ d'éléments de E ; $G = {}^tAA$ où A est la matrice de $(v_1, \ldots, v_p)$ dans une base orthonormale de E ; $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_p)$; déterminant de Gram $\det G$ de $(v_1, \ldots, v_p)$, interprétation géométrique de $\sqrt{\det G}$; meilleure solution approchée au sens quadratique du système d'équations linéaires $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dans le cas où $\operatorname{rg} A = p$. Matrice symétrique positive, définie positive ; une matrice symétrique G est définie positive si et seulement si elle est la matrice de Gram d'une base de E ; factorisation QR d'une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Arithmétique des entiers et des polynômes

– Idéal d'un anneau commutatif A, somme et intersection d'idéaux de A, noyau d'un morphismes d'anneaux $A \to B$. Idéal principal.
– Idéaux de $\mathbb{Z}$; caractérisation du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux entiers, théorème de Bézout. Relation de congruence modulo un entier $n \in \mathbb{N}^*$; anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Caractérisation des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; fonction indicatrice d'Euler φ ; théorème chinois.
– Idéaux de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$; caractérisation du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux polynômes, théorème de Bézout. Morphisme d'algèbres $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{A}$, $\phi \mapsto \phi(a)$ où $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre avec unité et a un élément de $\mathcal{A}$, idéal des polynômes annulateurs de a, sous-algèbre $\mathbb{K}[a]$ de $\mathcal{A}$. Polynôme minimal π_a d'un élément a de $\mathcal{A}$ admettant un polynôme annulateur non nul ; a admet un polynôme annulateur non nul si et seulement si $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie, auquel cas $\dim \mathbb{K}[a] = \deg \pi_a$.

4. Réduction des endomorphismes

– Sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E stable par un endomorphisme u de E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), endomorphisme u_F de F induit par u. Somme et intersection de sous-espaces u-stables. Si v est un

endomorphisme de E commutant avec u, $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont u-stables. Dans le cas où E est euclidien, un sous-espace vectoriel F de E est u-stable si et seulement si $F^{\perp}$ est u^*-stable. En dimension finie, caractérisation des endomorphismes stabilisant un sous-espace vectoriel F de E par leur matrice dans une base de E adaptée à F ; caractérisation des endomorphismes stabilisant des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_s$ de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$ par leur matrice dans une base de E adaptée à la décomposition de E.
- Théorème de décomposition des noyaux.
- Existence du polynôme minimal π_u de u en dimension finie ; polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe une droite u-stable de E ; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une droite ou un plan u-stable de E. Le polynôme minimal d'une matrice triangulaire par blocs $\left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ est un multiple de π_A et de π_B et un diviseur du produit de π_A et π_B. Le polynôme minimal de u est de degré inférieur ou égal à $\dim E$.
- Polynôme caractéristique χ_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$; une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude ; en dimension finie, polynôme caractéristique χ_u d'un endomorphisme u de E. Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs $\left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ est égal au produit de χ_A et χ_B. Théorème de Cayley-Hamilton.
- Vecteur propre, valeur propre de u ; sous-espace propre de u associé à une valeur propre. Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe. Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur de u. En dimension finie, les racines des polynômes π_u et χ_u sont les valeurs propres de u ; multiplicité d'une valeur propre λ de u ; si le polynôme caractéristique χ_u est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité sont égaux à la trace et au déterminant de u respectivement ; le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de λ.
- Endomorphisme trigonalisable en dimension finie, matrice carrée trigonalisable. Un endomorphisme u de E est trigonalisable si et seulement son polynôme caractéristique est scindé. Toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Endomorphisme nilpotent ; un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable de spectre nul.
- Endomorphisme diagonalisable en dimension finie, matrice carrée diagonalisable. Famille $(p_1, \ldots, p_s)$ des projecteurs associés à une décomposition de E de la forme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$; décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable u dont les sous-espaces propres sont $F_1, \ldots, F_s$: $u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_s p_s$; pour tout $\phi \in \mathbb{K}[X]$, $\phi(u) = \phi(\lambda_1) p_1 + \cdots + \phi(\lambda_s) p_s$. Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité : la somme des sous-espaces propres de u est égale à E ; le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de tout sous-espace propre de u est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante ; il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.
- Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale ; toute matrice carrée symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable. Réduction d'une forme quadratique sur E dans une base orthonormale. Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif ; décomposition polaire d'un endomorphisme inversible de E.

III - Suites et séries de fonctions - Intégrales avec paramètre

1. Comparaison de suites et de fonctions numériques
- Relations de comparaison, notations de Landau.
- Critère de comparaison de séries et d'intégrales absolument convergentes.
- Sommation et intégration des relations de comparaison.

2. Séries dans un espace de Banach
- Série convergente à termes dans un espace vectoriel normé. Condition de Cauchy. Série absolument convergente ; toute série absolument convergente à termes dans un espace de Banach est convergente.
- Une série absolument convergente à termes dans un espace de Banach est commutativement convergente. Famille dénombrable absolument sommable à valeurs dans un espace de Banach, somme d'une famille absolument sommable. Inégalité triangulaire. Sommation par paquets ; critère suffisant d'absolue sommabilité. Exemple des suites doubles absolument sommables.

- Algèbre normée, de Banach. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Série de Neumann ; application à la localisation du spectre d'une matrice ; le groupe $\mathcal{U}$ des éléments inversibles d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est ouvert ; continuité sur $\mathcal{U}$ de l'application $a \mapsto a^{-1}$. Application exponentielle exp dans une algèbre de Banach $\mathcal{A}$; si a et b commutent dans $\mathcal{A}$, alors $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

3. Suites et séries de fonctions

- Convergence simple d'une suite ou d'une série d'applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel normé de dimension finie F.
- Convergence uniforme d'une suite ou d'une série d'applications de X dans F. Condition de Cauchy uniforme. Espace de Banach $\mathcal{B}(X;F)$ des applications bornées de X dans F muni de la norme de la convergence uniforme. Critère suffisant d'uniforme convergence d'une série de fonctions : convergence normale. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une série alternée de fonctions réelles soit uniformément convergente.
- Théorème d'interversion des limites dans le cas où X est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ; continuité de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) uniformément convergente d'applications continues. Dans le cas où X est compact, espace de Banach $\mathcal{C}(X;F)$ des applications continues de X dans F muni de la norme de la convergence uniforme.
- Approximation uniforme d'une application continue de $[a,b]$ dans F par une fonction en escalier, par une fonction continue affine par morceaux.
- Espace de Banach $\mathcal{L}([a,b];F)$ des applications réglées (normalisées) de $[a,b]$ dans F muni de la norme $\| \ \|_\infty$; sous-espace vectoriel dense des fonctions en escalier (normalisées). Définition de l'intégrale sur $\mathcal{L}([a,b];F)$. Norme $\| \ \|_1$; convergence en moyenne d'une suite ou d'une série d'applications réglées de $[a,b]$ dans F. Inégalité de la moyenne ; comparaison des normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$; intégration sur $[a,b]$ de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) de fonctions réglées.
- Dérivation de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans F ; espace de Banach $\mathcal{C}^1([a,b];F)$ muni de la norme $f \mapsto \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$.
- Espaces vectoriels normés $\mathcal{L}^\infty(I)$, $\mathcal{L}^1(I)$ et $\mathcal{L}^2(I)$ des fonctions réglées (normalisées) à valeurs complexes respectivement bornées, intégrables et de carré intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Théorème de convergence dominée d'Arzelà. Intégration de la la somme d'une série de fonctions réglées à valeurs complexes.

4. Séries entières

- Séries entières dans le domaine complexe.
  Rayon, disque (ouvert) de convergence d'une série entière à coefficients complexes. Lemme d'Abel : une série entière de disque de convergence D est normalement convergente sur tout compact de D ; la somme de la série entière est continue sur D. Inégalités de Cauchy. Série entière dérivée.
- Séries entières dans le domaine réel.
  Intervalle (ouvert) de convergence d'une série entière ; la somme de la série entière d'intervalle de convergence I est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ; théorème de dérivation terme à terme. Fonction f à valeurs complexes définie sur un intervalle I développable en série entière en un point a de I ; développement de Taylor. Développements de Taylor usuels.

5. Séries de Fourier

- Premier et second théorèmes d'approximation polynomiale de Weierstrass.
- Espace de Hilbert réel ou complexe ; espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$. Meilleure approximation dans F d'un élément de H, projecteur orthogonal d'image F ; inégalité de Bessel. Base hilbertienne (ou famille orthonormale totale) de H ; famille des coefficients de Fourier d'un élément de H relativement à une base hilbertienne de H ; formule de Parseval.
- Polynôme trigonométrique, série trigonométrique ; famille $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto c_n(f)$ des coefficients de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ réglée 2π-périodique, série de Fourier de f ; suites des coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Série de Fourier d'une fonction paire, impaire. Relation entre $\hat{f}$ et $\widehat{f'}$ si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
- Espace préhilbertien $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ des fonctions réglées normalisées 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Inégalité de Bessel. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, où e_n désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$, est une base hilbertienne

de $\mathcal{L}(\mathbb{T})$; la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ converge en moyenne quadratique vers f ; formule de Parseval.
– Série trigonométrique normalement convergente. Si une fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.
– Théorème de Dirichlet : si une fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$.

6. Fonctions holomorphes
– Dérivation complexe, fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Équations de Cauchy-Riemann. Fonction analytique sur U ; toute fonction analytique sur U est holomorphe. Fonctions holomorphes usuelles.
– Développement de Taylor en un point d'une fonction holomorphe ; toute fonction holomorphe sur U est développable en série entière dans tout disque ouvert contenu dans U.
– Principe des zéros isolés.

7. Intégrales avec paramètre
– Continuité, dérivation d'une fonction définie par une intégrale sur un segment avec paramètre.
– * Continuité, dérivation d'une fonction définie par une intégrale avec paramètre : théorèmes dérivant du théorème de convergence dominée. *
– Fonction Γ sur la demi-droite $]0, \infty[$: intégrale eulérienne de seconde espèce, équation fonctionnelle, variations, convexité logarithmique, * formule d'Euler-Gauss, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), formule de Stirling. *
– * Transformée de Laplace Lf d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, causale et vérifiant une estimation de la forme $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$ avec $C \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}$; Lf est définie et holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > a\}$. Transformée de Laplace des fonctions $t \mapsto Y(t)t^n e^{ct}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{C}$, $t \mapsto Y(t) \cos \omega t$, $t \mapsto Y(t) \sin \omega t$, $t \mapsto Y(t) \cosh \omega t$, $t \mapsto Y(t) \sinh \omega t$ avec $\omega \in \mathbb{R}$, $t \mapsto Y(t)t^\nu$ avec $\nu \in \mathbb{R}_+$, où Y est la fonction de Heaviside. Transformée de Laplace de $t \mapsto e^{ct}f(t)$ avec $c \in \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t - \tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(\lambda t)$ avec $\lambda > 0$; transformée de Laplace d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux ; transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions. *

IV - Équations différentielles - Géométrie différentielle

1. Équations différentielles non linéaires
– Sytèmes différentiels autonomes du premier ordre en dimension 2.
Courbe intégrale γ d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$; interprétation cinématique ; courbe intégrale maximale ; système différentiel autonome du premier ordre associé. Invariance par translation des temps. Problème de Cauchy associé à la condition initiale $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ avec $(x_0, y_0) \in U$. Théorème de Cauchy : existence et unicité locale d'une solution du problème de Cauchy. Existence et unicité d'une solution maximale $\gamma_{\max} :]\omega_-, \omega_+[\to U$ du problème de Cauchy ; toute solution du problème de Cauchy est la restriction de $\gamma_{\max}$ à un sous-intervalle de $]\omega_-, \omega_+[$. Les images des courbes intégrales maximales (ou orbites) de $\boldsymbol{v}$ forment une partition de U.
– Équations différentielles scalaires du premier ordre.
Solution d'une équation $y' = f(x, y)$, où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; solution maximale, maximale à droite. Problème de Cauchy associé à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ avec $(x_0, y_0) \in U$; problème de Cauchy équivalent associé au champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (1, f)$ sur U. Théorème de Cauchy : existence et unicité locale des solutions du problème de Cauchy. Existence et unicité d'une solution maximale $y_{\max} :]\omega_-, \omega_+[\to \mathbb{R}$ du problème de Cauchy ; toute solution du problème de Cauchy est la restriction de $y_{\max}$ à un sous-intervalle de $]\omega_-, \omega_+[$. Condition nécessaire pour qu'une solution de l'équation $y' = f(x, y)$ soit maximale à droite dans le cas où $U = I \times \mathbb{R}$, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; définition d'une solution globale.
– Équations différentielles à variables séparables.
Étude du problème de Cauchy pour une équation de la forme $y' = f(x)g(y)$, où f et g sont des fonctions réelles continues définies sur des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$; solutions singulières. Équations différentielles homogènes.

2. Équations différentielles linéaires

– Sytèmes différentiels linéaires du premier ordre.
Solution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$, où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sont des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; solution globale. Théorème de Cauchy : existence et unicité d'une solution globale du problème de Cauchy, unicité locale des solutions. Système différentiel linéaire homogène $X' = AX$ associé ; structure de l'ensemble des solutions. Cas des systèmes différentiels réels. Système fondamental de solutions du système différentiel $X' = AX$, matrice fondamentale, wronskien, formule de Liouville. Méthode de la variation des constantes.

– Sytèmes différentiels linéaires autonomes du premier ordre.
Résolution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, par trigonalisation de A. Matrice fondamentale $t \mapsto \exp(tA)$, solution $t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$ du problème de Cauchy associé à la condition initiale $X(t_0) = X_0$. Exemples de calcul de $\exp(A)$; déterminant de $\exp(A)$. Interprétation d'un endomorphisme v d'un espace vectoriel réel ou complexe E de dimension finie comme un champ de vecteurs linéaire sur E ; expression intrinsèque d'un système différentiel linéaire homogène autonome du premier ordre. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par v et si $\gamma : \mathbb{R} \to E$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs v passant par un point de F, alors l'image $\gamma(\mathbb{R})$ de γ est contenue dans F ; application au cas où v est diagonalisable.

– Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients variables.
Problème de Cauchy pour une équation de la forme $x" + ax' + bx = c$ où a, b et c sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: existence et unicité d'une solution globale, unicité des solutions. Structure de l'ensemble des solutions. Système fondamental de solutions de l'équation homogène $x" + ax' + bx = 0$, wronskien. Méthode de la variation des constantes, condition de Lagrange. Réduction de l'équation homogène connaissant une solution ne s'annulant pas.

3. Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

– Courbe paramétrée ou chemin $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{R}^d$; changement de paramétrage, chemins $\mathcal{C}^k$-équivalents, $\mathcal{C}^k$-équivalents avec même orientation. Chemin de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Chemin fini, simple. Point régulier $t_0 \in I$ de γ, vecteur tangent $\gamma'(t_0)$; chemin régulier. Deux chemins finis, simpes et réguliers de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^d$ sont $\mathcal{C}^k$-équivalents si et seulement s'ils ont même image.
– Courbe régulière C dans $\mathbb{R}^2$ définie par une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, sans point critique sur C. Existence d'un paramétrage local de C en tout point a de C. Vecteur tangent à C en a, ensemble T_aC des vecteurs tangents à C en a ; T_aC est le noyau de la différentielle de f en a, équation de la droite tangente $a + T_aC$ à C en a.
– Surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$, point régulier, plan tangent, normale.
– Surface régulière S dans $\mathbb{R}^3$ définie par une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, sans point critique sur S. Existence d'un paramétrage local de S en tout point a de C. Vecteur tangent à S en a, ensemble T_aS des vecteurs tangents à S en a ; T_aS est le noyau de la différentielle de f en a, équation du plan tangent $a + T_aS$ à S en a ; normale à S en a.
– Réduction d'une fonction polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}^3$; équation réduite des coniques dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et des quadriques dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

4. Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

– Rotations et réflexions linéaires de $\mathbb{R}^2$; morphisme de groupe canonique de $\mathbb{R}$ sur SO(2). Tout déplacement de $\mathbb{R}^2$ est soit une translation, soit une rotation affine.
– Rotations, symétries orthogonales, réflexions linéaires. Rotation $r_{e,\theta}$ d'axe porté et orienté par un vecteur unitaire e et d'angle orienté θ ; interprétation géométrique de la formule de Rodrigues $r_{e,\theta} = \exp(\theta a_e)$ où a_e est l'endomorphisme $v \mapsto e \times v$ de $\mathbb{R}^3$; théorème d'Euler, détermination de l'axe et de l'angle orientés d'une rotation donnée par sa matrice dans la base canonique. Tout déplacement de $\mathbb{R}^3$ est soit une translation, soit une rotation affine, soit un vissage.
– Abscisses curvilignes associées à un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$, longueur d'un chemin fini, chemin normal ; tout chemin régulier de classe $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$-équivalent à un chemin normal.
– Repère de Frenet associé à une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$ régulière dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$; formules de Frenet, courbure, rayon de courbure en un point birégulier.

– Repère de Frenet associé à une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^3$ birégulière dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$; formules de Frenet, courbure, torsion, plan osculateur.

5. Primitivation d'une forme différentielle de degré 1

– Forme différentielle de degré 1 ω de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
– Primitive sur U d'une 1-forme différentielle ω continue ; 1-forme différentielle exacte. Intégrale d'une 1-forme différentielle continue suivant un chemin fini γ dans U de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Une 1-forme continue ω est exacte si et seulement si l'intégrale de ω suivant tout lacet dans U est nulle.
– 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ fermée. Lemme de Poincaré : toute 1-forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé est exacte.
– Champ de vecteurs X sur U associé à une 1-forme différentielle ω continue moyennant la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^d$. Circulation de X suivant un chemin fini γ dans U de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
– Une application de classe $\mathcal{C}^1$ $z \mapsto f(z) = p(x,y) + iq(x,y)$ d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe si et seulement si les 1-formes différentielles $p\,dx - q\,dy$ et $q\,dx + p\,dy$ sont fermées. Primitive sur un ouvert U d'une fonction holomorphe ; si l'ouvert U est étoilé, toute fonction holomorphe sur U admet une primitive sur U.
– Définition du logarithme principal Log sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$; pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$; développement en série entière de $\mathrm{Log}\,(1+z)$. L'argument principal est une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de la 1-forme différentielle $(x^2+y^2)^{-1}(x\,dy - y\,dx)$. Théorème de relèvement d'un chemin de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{C}^*$, avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

6. Intégrales doubles et triples, aires et volumes

– Formule de Fubini.
– Domaine élémentaire, simple du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Intégrale sur un domaine simple D d'une fonction continue $f : D \to \mathbb{C}$; aire de D. Formule de changement de variables. Formule de Green sur un domaine élémentaire.
– Extension aux intégrales triples.