Strucures algébriques usuelles

GROUPES

EXO 1 : Montrer que $\mathbb{R}$ muni de la loi $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ est un groupe commutatif.

EXO 2 : On définit la lci * sur $\mathbb{R}$ par $x * y = x + y - xy$. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

EXO 3 :

1) Montrer que $\forall x, y \in]-1,1[\,, \dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.
2) Montrer que]-1,1[muni de la loi $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est un groupe abélien.

EXO 4 : Montrer qu'un groupe (G, .) ,dans lequel pour tout élément x , $x^2 = e$, est abélien.

SOUS-GROUPES

EXO 5 : Soit (G, .) un groupe multiplicatif.

1) On note $Z(G) = \{a \in G / \forall b \in G, ab = ba\}$. Mque $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2) Soit $g \in G$ fixé. Notons $C(g) = \{a \in G / ag = ga\}$. M que $C(g)$ un sous-groupe de G.

EXO 6 : Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $H = \{a + b\omega / a, b \in \mathbb{Z}\}$. M que H est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

EXO 7 : Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $H = \{a^m / m \in \mathbb{Z}\}$. M que H est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

EXO 8 : Soit a un élément d'un ensemble E.
On note S(E) l'ensemble des bijections de E sur E, et H = {f $\in$ S(E) / f(a) = a}.
Montrer que H est un sous-groupe de (S(E), o) .

EXO 9 : Pour chaque $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$, on définit l'application $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f_{a,b}(z) = az + b$. Montrer que (H, o) , où $H = \{f_{a,b} / a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}\}$,est un groupe.

MORPHISME DE GROUPES :

EXO 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = x^n, \forall x \in \mathbb{R}^*$.
M.que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$, puis en déterminer l'image et le noyau.

EXO 11 :
Soient G et G' deux groupes notés multiplicativement et f un morphisme de G dans G'.

1) Montrer que l'image par f d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G' .
2) Montrer que l'image réciproque par f d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G.

EXO 12 : Soit G un groupe noté multiplicativement, et soit a un élément de G.
On désigne par f_a l'application définie de G vers G telle que $f_a(x) = axa^{-1}, \forall x \in G$.

1) Montrer que f_a est un automorphisme de G. (il s'appelle automorphisme intérieur de G)
Int(G) désigne l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.

2) Démontrer que l'application $\begin{array}{l} \varphi : G \to Aut(G) \\ \quad a \mapsto f_a \end{array}$ est un morphisme de groupes, dont on déterminera l'image et le noyau.

3) En déduire que Int(G) est un groupe pour la composition des applications.

ANNEAUX ET CORPS :

EXO 13 : On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de compositions internes + et * par :
(a,b)+(c,d) =(a+c,b+d) et (a,b)*(c,d)=(ac,ad+bc).

1) Montrer que $(\mathbb{Z}^2,+,*)$ est un anneau commutatif.
2) Montrer que A={(a,0) / a $\in \mathbb{Z}$ }est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2,+,*)$.

Exo 14 : Soient x et y deux éléments d'un anneau (A,+, $\times$).

Définition : x est dit nilpotent si ssi $\exists n \in \mathbb{N}^* / x^n = 0$.

1) Montrer que si x est nilpotent et que xy = yx alors xy est aussi nilpotent.
2) Montrer que si x et y sont nilpotents et que x et y commutent alors x+y est nilpotent.
3) Montrer que si xy est nilpotent alors yx est nilpotent .
4) Montrer que si x est nilpotent alors (1-x) est inversible, et préciser son inverse $(1-x)^{-1}$.

EXO 15 : On note $D = \{\frac{n}{10^k} / n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Montrer que D est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.

EXO 16 : Soit $A = \{\frac{m}{n} / m \in \mathbb{Z} \ et \ n \in \mathbb{N}^* impair\}$.

1) Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.
2) Quels sont ses éléments inversibles ?.