Géométrie de l'espace

Exercice 1 Montrer que les quatre points $A = (2, -3, 4)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (2, -1, 2)$ et $D = (1, -1, 3)$ sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ les contenant. Donner alors des représentations cartésienne et paramétrique du plan passant par O et parallèle à $(\mathcal{P})$.

Exercice 2 Montrer que les droites $(\mathcal{D}) : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -2-2t \\ z & = & -3+3t \end{array}\right.$ et $(\mathcal{D}') : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & -5-t \end{array}\right.$ sont concourantes, et donner une équation cartésienne du plan les contenant. Donner alors des équations cartésiennes de chacune de ces deux droites.

Exercice 3 Soit les droites $\mathcal{D} \left\{\begin{array}{lcl} x+my+z & = & 1 \\ x-y+2z & = & 2m \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}' \left\{\begin{array}{lcl} mx+y-z & = & -1 \\ x+y+z & = & m \end{array}\right.$.

1. A quelle condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel m ces droites sont-elles parallèles ?
2. A quelle condition nécessaire et suffisante ces droites sont-elles sécantes ? Trouver leur point d'intersection dans ce cas.

Exercice 4 Montrer qu'il existe une droite passant par $A = (4, -7, 5)$ et rencontrant $(\mathcal{D}) : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$ et $(\mathcal{D}') : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+3t \\ y & = & 3+t \\ z & = & 3+2t \end{array}\right.$. Donner des représentations paramétrique et cartésienne de cette droite.

Exercice5 Donner une équation du plan passant par $A = (1, 3, -4)$ et par l'intersection de $(\mathcal{P})$: « $x - 2z - 3 = 0$ » et $(\mathcal{P}')$: « $y + z + 5 = 0$ ».

Exercice 6 Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, muni de son repère canonique, on considère les deux plans (P) et (P') d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+\lambda+2\mu \\ y & = & 2+2\lambda+\mu \\ z & = & 1-\lambda-\mu \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3u-v \\ y & = & 3+3u+v \\ z & = & 1-2u \end{array}\right.$.

Montrer que $(P) = (P')$.

Exercice 7 Déterminer l'équation du plan (P) de $\mathbb{R}^3$ passant par les points $A = (0, -1, 2)$ et $B = (-1, 2, 3)$, et tel que l'axe (Oy) soit parallèle à (P).

Exercice 8 Calculer les déterminants suivants (forme factorisée souhaitée) :

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 9 On se place dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique.

1. Montrer que les trois points $M_i = (x_i, y_i)$, $i = 1 \ldots 3$, sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$.
2. Construire la *strophoïde droite* (C) d'équation paramétrée $\left(x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, y(t) = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.
   Former une condition nécessaire et suffisante sur $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$ pour que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ de (C) soient alignés.

Exercice 10

Chercher la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ « $x = y = z$ » et $\mathcal{D}'$ $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 7 \\ 3x+z & = & -2 \end{array}\right.$.

Quelle est la distance entre ces deux droites ?

Exercice 11 Déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives : $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ x-y-z & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Exercice 12 Soit $\mathcal{D}$: $\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}'$: $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y-z & = & 0 \end{array}\right.$, deux droites de l'espace.

1. Justifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. Former un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 13 On considère l'ensemble $\mathcal{B} = \{M(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$, où $a > 0$. Redéfinir l'ensemble $\mathcal{B}$ en utilisant les coordonnées cylindriques (r, θ, z), puis les coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Exercice 14 Vérifier que les quatre points $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, 1)$ et $D = (3, 2, 1)$ sont non coplanaires.
Déterminer le projeté orthogonal H de A sur le plan (BCD). En déduire $\mathrm{d}(A, (BCD)))$

Exercice 15 Volume du parallélépipède construit sur $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$ et $\vec{w} = (2, 0, 3)$?

Exercice 16 Soit $\mathcal{S}$, la sphère de centre $\Omega(1, 0, 0)$, de rayon 2, et $\mathcal{D}$ la droite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-y & = & 1 \end{array}\right.$.
Calculer la distance d de A à $\mathcal{D}$, et les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 17 Déterminer l'intersection des sphères $\mathcal{S}$ de centre $A(1, 0, 1)$, rayon 1 et $\mathcal{S}'$ de centre $A'(2, 1, -1)$, rayon 2.

Exercice 18

1. Montrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant « $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$ » est une sphère S. Donner son centre et son rayon.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à S au point O, l'origine du repère.

Exercice 19 Déterminer, par le calcul, l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ avec $A = (1, 2, 1)$ et $B = (3, 4, -3)$.

Exercice 20 Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle $\mathcal{C}$ le cercle d'équations : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 5 \end{array}\right.$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un cercle.
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les "plans de coordonnées".
4. Déterminer les points $M = (x, y, z)$ de $\mathcal{C}$ vérifiant $x^3 + y^3 + z^3 = 9$.