COUBES PARAMETREES PLANES

Courbes planes en coordonnées cartésiennes :

EXERCICE 1 : (Lemniscate de Bernoulli)

Considérons la courbe paramétrée (Γ) définie par : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=\dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t)=\dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$

1) i) Etudier la parité des fonctions x(t) et y(t).
   ii) En déduire une réduction du domaine d'étude.
   iii) Que dire de la symétrie de la trajectoire de (Γ).
2) i) Calculer $x(\frac{1}{t})$ et $y(\frac{1}{t})$ en fonction de x(t) et y(t).
   ii) En déduire une autre réduction du domaine d'étude.
   iii) Que dire de la symétrie de la trajectoire de (Γ).
3) Etudier les variations des fonctions x(t) et y(t) sur [0,1], et dresser le tableau de variations conjoint de x(t) et y(t).
4) Tracer la trajectoire de la (Γ) sur [0,1].
5) En déduire sur un autre tracé la trajectoire sur $\mathbb{R}$ tout entier.

EXERCICE 2 : (Astroïde)

Soit la courbe paramétrée (Γ) définie par : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=\cos^3 t \\ y(t)=\sin^3 t \end{cases}$

1) i) Etudier la périodicité des fonctions x(t) et y(t).
   ii) que peut-on déduire ?
2) i) Etudier la parité de x(t) et y(t).
   ii) En déduire une réduction du domaine d'étude.
   iii) Que peut-on en déduire sur la symétrie de la trajectoire ?
3) i) Calculer $x(\pi-t)$ et $y(\pi-t)$ en fonction de x(t) et de y(t).
   ii) Réduire le domaine d'étude.
   iii) Que peut-on en déduire sur la symétrie de la trajectoire ?
4) i) Calculer $x(\frac{\pi}{2}-t)$ et $y(\frac{\pi}{2}-t)$ en fonction de x(t) et de y(t).
   ii) Réduire le domaine d'étude.
   iii) Que dire sur la symétrie de la trajectoire ?
5) Etudier les variations des fonctions x(t) et y(t) sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, et dresser le tableau de variations conjoint de x(t) et y(t).
6) Tracer la trajectoire de la (Γ) sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
7) En déduire sur un autre tracé la trajectoire restante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

EXERCICE 3 : (courbe de Lissajous)

Soit la courbe paramétrée (f) définie par : $(f):\begin{cases} x(t)=\cos 3t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$

1) i) Etudier la périodicité des fonctions x(t) et y(t).
   ii) Que peut-on déduire sue la réduction du DE ainsi que sur la symétrie de (f).

2) i) Etudier la parité de x(t) et y(t).
   ii) En déduire une réduction du domaine d'étude.
   iii) Que peut-on en déduire sur la symétrie de la trajectoire ?
3) i) Calculer x($\pi - t$) et y($\pi - t$) en fonction de x(t) et de y(t).
   ii) Réduire le domaine d'étude.
   iii) Que peut-on en déduire sur la symétrie de la trajectoire ?
4) Etudier les variations des fonctions x(t) et y(t) sur [0, $\frac{\pi}{2}$], et dresser le tableau de variations conjoint de x(t) et y(t).
6) Tracer la trajectoire de la (Γ) sur [0, $\frac{\pi}{2}$].
   (Préciser sur le tracé les tangentes aux points remarquables)
7) En déduire sur un autre tracé la trajectoire restante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Courbes planes en coordonnées polaires :

EXERCICE 4 : (cardioïde)
Considérons la courbe polaire (Γ) définie par : $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$

1) Déterminer le domaine de description totale de (Γ).
2) i) Etudier la parité de ρ.
   ii) En déduire le domaine d'étude .Que dire sur la symétrie ?
3) Déterminer l'intersection de la courbe polaire avec l'axe (Oy) sur DE.
4) Déterminer le signe et les variations de ρ sur $[0, \pi]$.
5) Donner l'allure de (Γ) sur l'intervalle $[0, \pi]$.
6) En déduire sur un autre tracé trajectoire entière de (Γ).

EXERCICE 5 : (cissoïde droite)
Considérons la courbe polaire (Γ) définie par : $\rho(\theta) = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$.

1) Trouver D_ρ.
2) Montrer que $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est le domaine de description totale de (Γ).
3) i) Etudier la parité de ρ.
   ii) En déduire le domaine d'étude .Que dire sur la symétrie ?
4) Déterminer le signe et les variations de ρ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
5) Etudier les branches infinies de (Γ) sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ tout en indiquant la position par rapport à l'asymptote.
6) Déterminer l'allure de (Γ).

EXERCICE 6 :
Soit (Γ) la courbe paramétrée définie en coordonnées polaires par : $\rho(\theta) = \cos^2\theta$.

1) Quel est le domaine de description totale de (Γ) ?
2) i) Calculer $\rho(\theta + \pi)$ en fonction de $\rho(\theta)$.

   ii) En déduire le domaine d'étude .Que dire sur la symétrie ?
3) i) Etudier la parité de ρ.
4) En déduire que $[0, \frac{\pi}{2}]$ est le domaine d'étude. Que dire de la symétrie ?

5) Déterminer le signe et les variations de ρ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

6) Calculer $\rho(\frac{\pi}{4})$ puis tracer l'allure de (Γ) sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

7) En déduire le tracé entier de (Γ) (sur un autre tracé)

<u>EXERCICE 7 :</u>

Soit (Γ) la courbe polaire définie par : $\rho(\theta)=\cos(3\theta)$.

1) i) Calculer $\rho(\theta+\frac{2\pi}{3})$ en fonction de $\rho(\theta)$.

   ii) En déduire la relation liant $M(\theta+\frac{2\pi}{3})$ *et* $M(\theta)$.

   iii) Si (Γ_1) est le tracé de la courbe paramétrée sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$,décrire comment obtenir l'intégralité du tracé.

2) i) Quelle est la parité de ρ ?

   ii) Déduire de 2)i) et de 1) le domaine d'étude. Que dire sur la symétrie ?

3) Déterminer le signe et les variations de ρ sur $[0,\frac{\pi}{3}]$.

4) Tracer la courbe sur $[0,\frac{\pi}{3}]$.

5) Compléter , sur un autre tracé, la courbe de (Γ).