Fiche de calcul matriciel

Exercice 1 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et plus généralement A^n pour tout entier $n \geq 1$.
2. On pose $B = A + \mathrm{I}_2$: calculer B^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 = 0$.

Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, $(\mathrm{I}_n + A)^k = \mathrm{I}_n + kA$.

Application : calculer B^k si $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$: montrer que $(A - \mathrm{I}_2)$ est nilpotente et en déduire les puissances de A.

On définit les suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour $n \geq 0$: $\begin{cases} u_{n+1} & = & 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n \end{cases}$.

Donner des expressions des termes u_n et v_n en fonction de n uniquement.

Exercice 4 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = A - \mathrm{I}_3$. Calculer M^2, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}. Donner l'expression de A^n pour tout entier n.

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de A.En déduire : A est inversible. Calculer A^{-1}.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $A^{n+1} - 2A^n = A - 2\mathrm{I}_3$.
3. On pose $G_n = A^n + A - 2\mathrm{I}_3$: montrer que (G_n) définit une suite «géométrique», puis en déduire A^n.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$: en déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer le polynôme R_n, reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 7 Pour tout réel x, on pose $R(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout couple de réels (x, y), $R(x)R(y) = R(x + y)$.
2. En déduire $R(x)^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que $R(x)$ est inversible et calculer $R(x)^{-1}$.
3. Montrer que $\{R(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe abélien de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.