Arithmétique dans Z

Congruence

Exercice 1: Montrer que $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 2: Quel est le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 ?

Exercice 3: Trouver les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tel que $10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$.

pgcd & ppcm

Exercice 4: Déterminer le pgcd et les coefficients de l'égalité de Bézout (1730-1783) des entiers a et b suivants :

a) $a = 33$ et $b = 24$ b) $a = 37$ et $b = 27$ c) $a = 270$ et $b = 105$.

Nombres premiers entre eux et nombres premiers

Exercice 5: Soit a et b premiers entre eux.
Montrer que $a \wedge (a+b) = b \wedge (a+b) = 1$ puis $(a+b) \wedge ab = 1$.

Exercice 6: Soit a et b deux entiers premiers entre eux non nuls.
Notre but est de déterminer tous les couples $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$.

a) Justifier l'existence d'au moins un couple solution (u_0, v_0).

b) Montrer que tout autre couple solution est de la forme $(u_0 + kb, v_0 - ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Conclure.

Exercice 7: Soit p un nombre premier.

a) Montrer que $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ on a $p \mid \binom{p}{k}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a $n^p = n \quad [p]$.

Système des restes chinois

Exercice 8: On veut résoudre le système (S) suivant : $\begin{cases} x = 2 \quad [10] \\ x = 5 \quad [13] \end{cases}$.

1) Trouver deux entiers relatifs u et v tels que 10u+13v=1.

2) En déduire deux entiers relatifs k et k' tels que 10k-13k'=3.

3) Chercher une solution particulière du système (S).

4) En déduire toutes les solutions du système (S).