

Définitions et notations : Dans tout ce problème, E est un \mathbb{K} -ev de dimension $n \geq 1$. L'application identité de E sera notée Id , l'ensemble de tous les endomorphismes de E sera noté $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n . La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $Tr(A)$.

Pour tout endomorphisme f de E , on notera $f^0 = Id$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$. On notera aussi $Ker(f)$ le noyau de f , $Im(f)$ l'image de f .

Un sous-ensemble F de E est dit invariant par f si pour tout $x \in F$, on a $f(x) \in F$.

Partie I : Préliminaire

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Vérifier que $Tr(AB) = Tr(BA)$.

(b) Dédire que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $Tr(A) = Tr(B)$.

Notons alors que pour tout endomorphisme f de E , la trace d'une matrice A de f ne dépend que de f par $Tr(f) = Tr(A)$.

2. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tel que g est inversible et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Montrer que l'égalité $f + \alpha g = g^{-1} \circ f \circ g$ est équivalente à $Tr(f) = \alpha Tr(g)$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Vérifier que $Ker(u^k) \subset Ker(u^{k+1})$.

(b) Montrer que si $Ker(u^k) = Ker(u^{k+1})$ alors $Ker(u^k) = Ker(u^{k+p})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(c) Dédire que si $Ker(u^{k+1}) \neq Ker(u^{k+2})$ alors $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$.

(d) Montrer que si $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$ alors $dim(Ker(u^{k+1})) \geq k + 1$.

(e) Dédire que $Ker(u^n) = Ker(u^{n+1})$ et que $E = Ker(u^n) \oplus Im(u^n)$.

Dans la suite du problème, on dit qu'un couple (u, v) d'endomorphismes de E vérifie la propriété (P) si : $u \circ v - v \circ u = u$.

Partie II : Étude d'un exemple

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E , et u l'endomorphisme de E dont la matrice canoniquement associée est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer (en justifiant!) le rang de u et une base de chacun de $Im(u)$ et $Ker(u)$.
2. Calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ est une base de E . Donner la matrice de u dans cette base.
4. Soit v un endomorphisme de E .

(a) Justifier l'existence de trois réels a_0, a_1, a_2 tels que $v(e_1) = a_0 e_1 + a_1 u(e_1) + a_2 u^2(e_1)$.

(b) Montrer que le couple (u, v) vérifie la propriété (P) si, et seulement si, la matrice de v dans \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 - 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 - 2 \end{pmatrix}$$

(c) Soit v_0 l'endomorphisme dont la matrice dans \mathcal{B} est $D = \text{diag}(0, -1, -2)$.

Vérifier que le couple (u, v_0) vérifie la propriété (P) .

(d) Montrer que (u, v) vérifie la propriété (P) si, et seulement si, $v - v_0 \in \text{Vect}(Id, u, u^2)$.

Partie III : Cas général

Notons $C_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ et $P_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid (u, v) \text{ vérifie la propriété } (P)\}$.

On suppose $u^n = 0$ et on suppose $P_u \neq \emptyset$.

1. Soit $v \in P_u$.

(a) Montrer que u n'est pas nul.

(b) Montrer que pour tout entier naturel k , on a : $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^{k-1}$.

On admet que $u^n = 0$ et on suppose $dim(Ker(u)) = 1$.

2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ $dim(Ker(u^k)) = k$.

(Indication : Penser à la restriction de u sur $Im(u^k)$)

-
3. Justifier l'existence d'un vecteur $e \notin \text{Ker}(u^{n-1})$, et montrer que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$
e E . Donner la matrice de u dans \mathcal{B}_e
4. Soit w un endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B}_e est $D = \text{diag}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$.
 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $w \in P_u$.
 Soit w_0 celui de $\alpha_0 = 0$.
5. On suppose $w \in C_u$.
- (a) Vérifier que $\text{Im}(w)$ et $\text{Ker}(w)$ sont stables par u .
- (b) Montrer que $w \in C_{u^k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (c) Justifier qu'il existe n scalaires a_0, \dots, a_{n-1} tels que $w(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e)$.
 Déterminer alors le polynôme w de \mathcal{B}_e .
- (d) En déduire que $C_u = \text{Vect}(Id, u, \dots, u^{n-1})$.
- (e) Décrire le polynôme P_u en fonction de w_0 et de C_u .