المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche
Scientifique de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Nationale Supérieure des Mines de Rabat

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et
et Établissements Assimilés

Session 2016

ÉPREUVE DES MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Durée 4 heures

cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Problème 1

Soit n un entier naturel, on note $[\![0,n]\!] = \{0,...,n\}$, on appelle polynômes de Bernstein de degré n les polynômes réels $B_{n,k} = \mathrm{C}_n^k X^k (1-X)^{n-k}$, $k \in [\![0,n]\!]$. Dans ce problème, on voudrait démontrer le théorème de Weierstrass par deux méthodes et donner quelques applications de ce théorème. Dans toute la suite, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I

Théorème de Weierstrass

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par,

$$\forall x \in [0,1], \;\; P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

1. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$.

(b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $\;0 \le B_{n,k}(x) \le 1$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$, (on étudiera les trois cas : ($k \neq 0$ et $k \neq n$), ($k = 0$) puis ($k = n$)).

(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, ($P_n(f))'(x) = n \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n-1,k}(x)$.

(c) En déduire que si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $P_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$.

4. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

(a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$,

$$|y - x| \le \alpha \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

(On vous demande de redémontrer le théorème de Heine pour l'application f continue sur le segment $[0,1]$).

(c) Soit $x \in [0,1]$, on pose $A = \{k \in [\![0,n]\!], \;\; \left|x - \dfrac{k}{n}\right| \le \alpha\}$ et $B = \{k \in [\![0,n]\!], \;\; \left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \alpha\}$.

i. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\leq\frac{2M}{n\alpha^2}x(1-x)\leq\frac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

(d) En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$, $|P_n(f)(x)-f(x)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

(e) En déduire que la suite $(P_n(f))_{n\geq1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5. Plus généralement, soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n(g))_n$ qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Partie II
Une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x, $x\in[0,1]$, on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n=\dfrac{S_n}{n}$.

(a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n.

(b) Justifier que, pour tout $\delta>0$, $P(|X_n-x|\geq\delta)\leq\dfrac{1}{4n\delta^2}$.

2. On introduit la variable aléatoire $Y_n=f(X_n)$ et on pose pour tout $x\in[0,1]$, $C_n(f)(x)=E(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon>0$.

(a) Vérifier que $x\mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

(b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0,1]$, alors il existe $\beta>0$ tel que, pour tout $(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]$, $|x_1-x_2|\leq\beta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

i. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\beta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$

ii. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|\leq\dfrac{M}{2n\beta^2}$, avec $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

(c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n\geq1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Partie III
Applications

Dans toute la suite de ce problème, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, on pose $I=[a,b]$.

1. Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0.$$

(a) Montrer que la fonction f est nulle sur I.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^ne^{-(1-i)x}\mathrm{d}x$.

(c) En déduire qu'il existe une fonction réelle ϕ, continue sur $[0,+\infty[$ et non nulle, telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\phi(x)\mathrm{d}x=0$.

2. Soit $g:I\to\mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=0$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, $\displaystyle\int_a^b P_n(t)\mathrm{d}t=0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|g(t)-P_n(t)|\right)=0$.

3. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi(t)-P_n(t)|\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi'(t)-P_n'(t)|\right)=0$

4. Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, (pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in I$, $P_n(t)\geq 0$), et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|\psi(t)-P_n(t)|\right)=0$