Principe de récurrence

Récurrence simple :

Exercice 1 : Montrer que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n$.

Rappel : f est strictement croissante veut dire que : $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \prec m \Rightarrow f(n) \prec f(m)$.

Exercice 4 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 4, n^2 \leq 2^n$.

Exercice 5 : 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \ldots, x_{2^n} \in \mathbb{R}^+, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$.

3) Retrouver cette inégalité par un argument de convexité.

Récurrence double :

Exercice 6 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par :

$u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-2)^n - 3(-1)^n$.

Exercice 7 (suite de Fibonacci)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

Récurrence forte :

Exercice 8 : Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $u_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 2, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = \dfrac{2a_n+1}{2b_n}$.

(c.à.d. que u_n peut s'écrire comme rapport d'un entier impair et d'un entier pair)

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 2, u_n \notin \mathbb{N}$.