Matrices et applications linéaires

Exercice 1

Donner les matrices des applications suivantes par rapport aux bases canoniques correspondantes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto f(x,y) = (2x-y, x+y, x)$.
2. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P \mapsto f(P) = (X+1)P - X^2P'$.
3. $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3,\ P \mapsto f(P) = (P(0), P'(1), P''(2))$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto f(x,y) = (x-y, 2x+y, x-2y)$
et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (X,Y,Z) \mapsto g(X,Y,Z) = (X+Y, X+2Y)$.
Donner les matrices A, B, C et D de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ relativement aux bases canoniques.

Exercice 3 Soit $f(x,y,z) = (z,y,x)$. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
Vérifier que $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice canoniquement associée $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 5 Montrer que la famille $(\sin, \cos, \exp)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $E = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \exp)$. Montrer que $\varphi : f \in E \mapsto f'$
est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base ci-dessus.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, et f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E . Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme associé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = (1,1,-1), u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,2,1)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire A^n.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.

On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire la matrice de f dans cette base.

c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,0,1), \varepsilon_2 = (-1,1,0), \varepsilon_3 = (1,1,1)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.

b) Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

c) Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) Déterminer une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.

b) Déterminer la matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

c) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Considérons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 1 \end{cases}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$

d) Calculer x_1, y_1 *et* z_1.

e) Posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. *Ecrire* X_{n+1} *en fonction de* A *et* X_n.

En déduire X_n *puis les termes généraux des suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 11 Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\Phi(P)(X) = P(X+1)$.

1. Donner la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer A^{-1}.

Exercice 12 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $\vec{x}_0 \in E$ vérifiant : $u^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ et $u^n(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Montrer que $\mathcal{F} = (\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), u^2(\vec{x}_0), \ldots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ est une base de E.

Donner la matrice de u relativement à cette base.

Exercice 13 Soit f et g dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associés à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Montrer que g est un automorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ vérifiant $(g - \mathrm{Id}_E) \circ (g - \mathrm{Id}_E) = 0$. Préciser g^{-1}.
3. On pose $h = f \circ g$: montrer que h est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques. Que remarque-t-on ?