DERIVABILITE

<u>Généralités :</u>

EXO 1 : Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles dérivables ?

1) $x \mapsto x|x|$, 2) $x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$, 3) $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

EXO 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f possède une dérivée symétrique en 0 ssi $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ existe et est finie.

1) Si f est dérivable en 0, montrer que f admet une dérivée symétrique en 0 et calculer-la.
2) Si f admet une dérivée symétrique en 0, f est-elle dérivable en 0 ?

EXO 3 : A) Dériver les fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \frac{3x\ln x+1}{2x\ln x+3}$, 2) $x \mapsto \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}$, 3) $x \mapsto \frac{x+1}{(x+3)(x+4)}$, 4) $x \mapsto \sin(f(x^2))$, 5) $x \mapsto \sin((f(x))^2)$

B) Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $x \mapsto x^x$, 2) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$, 3) $x \mapsto (chx)^x$, 4) $x \mapsto \ln|x|$

EXO 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Calculer la limite $\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

<u>Dérivée d'ordre n :</u>

EXO 5 : Calculer la dérivée $n^{ème}$ des fonctions : $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ *puis* $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

EXO 6 : Calculer la dérivée $n^{ème}$ de : $x \mapsto (\cos x)^3, x \mapsto \sin x.e^x, x \mapsto (x^2+1)e^x, x \mapsto x^2(1+x)^n$.

EXO 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}}\sin x$.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}}\sin(x+\frac{n\pi}{6})$.

EXO 8 : *Soit* $n \in \mathbb{N}$:

1) Ecrire la dérivée $n^{ème}$ de la fonction x^{2n}.
2) Calculer la dérivée $n^{ème}$ de la fonction x^{2n} via Leibniz en écrivant $x^{2n} = (x^n.x^n)$.
3) En déduire que $\sum_{k\ 0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

EXO 9 :
Déterminer toutes les applications dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)+f(y)$.

Théorème de Rolle :

EXO 10 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable.

On suppose que f' ne s'annule pas. Mq f ne peut être périodique.

EXO 11 : Soient a,b et c trois réels.

M.qu'il existe x$\in$]0,1[tel que $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$.

EXO 12 : Soient $n\in\mathbb{N}, a\prec b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si $f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$ et $f(b)=0$ alors il existe c$\in$]a,b[tel que $f^{(n)}(c)=0$.

EXO 13 : Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
On suppose que $\forall x\in[a,b], g'(x)\neq 0$.

1) Montrer que $g(a)\neq g(b)$.
2) Montrer qu'il existe c$\in$]a,b[tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

TAF :

EXO 14 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Mque $\forall x\succ 0, \exists c\succ 0 / f(x)-f(-x)=x(f'(c)+f'(-c))$.

EXO 15 : Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,a+2h]$ (avec $a\in\mathbb{R}$ et $h\succ 0$).
Montrer que $\exists c\in]a,a+2h[/ f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)=h^2f''(c)$.
(Indication : introduire $\varphi(x)=f(x+h)-f(x)$).

EXO 16 : Etablir les inégalités suivantes :
1) $\forall x\in]-1,+\infty[, \dfrac{x}{x+1}\le \ln(1+x)\le x$, 2) $\forall x\in\mathbb{R}^+, e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

EXO 17 : A l'aide du TAF calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}})$.

EXO 18 : Montrer que $\forall x\succ 0, \dfrac{1}{1+x}\prec ln(1+x)-\ln x\prec\dfrac{1}{x}$.

Classe d'une fonction :

EXO 19 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que f est lipschitzienne.

EXO 20 : Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ $définie\ par$ $f(x)=\begin{cases}x^2\ln x & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

EXO 21 :

Soit $f(x)=\exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1) Montrer que f est C^1 et que $f'(0)=0$.

2) Montrer que f est C^∞ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(0)=0$.

EXO 22 [Règle de l'Hospital] Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables avec $\forall\ x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
(Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi).
2. En déduire que si
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l, \quad \text{quand } x \to a^+,$$
alors (règle de l'Hospital)
$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \to l, \quad \text{quand } x \to a^+.$$
3. Application : déterminer
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}.$$

EXO 23 Pour tout $n \geq 2$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction
$$f_n : x \mapsto x - cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ vérifiant
$$x_n = cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$$
2. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $n \geq 2$, on a l'inégalité
$$f_n(x) > f_{n+1}(x).$$
En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
3. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

EXO 24 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ si $t < 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On cherche à montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = e^{\frac{1}{t}}\, t^{-2n}\, P_n(t)$$
où P_n est une fonction polynomiale.
   - 3.a. Trouver P_1 et P_2.
   - 3.b. Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.