CONVEXITE

Exercice 1:

Montrer les inégalités suivantes par un argument d e convexité.

a) $\forall x \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, ..., x_{2^n} \in \mathbb{R}^+, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$. (Déjà montrée au TD: Principe de récurrence)

d) $Montrer\ que\ pour\ x \in [0,1]\ ,\ on\ a\ 1 + x \leq e^x \leq 1 + x(e-1)$.

Exercice 2: Montrer que $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave.

En déduire $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2$ on a : $\ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x . \ln y}$.

Exercice 3: En étudiant la convexité de $f : t \mapsto (1+t^p)^{1/p}$ établir $(1+t^p)^{1/p} \geq 1+t$

En déduire que $\forall x, y \geq 0, x^p + y^p \geq (x+y)^p$.

Exercice 4: a) Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$

b) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}, 1+\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} 1+x_k\right)^{1/n}$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^{+*}$, l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n} .$$

Exercice 5: (Inégalité de Hölder)

Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$.