Espaces préhilbertiens reels

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1. $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. $\psi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)dt$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Schmidt à la base $\{(1,1,1),(2,-1,2),(1,1,-2)\}$.

Exercice 3

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace euclidien .Soient $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (1,-1,1,-1)$ et $F =$Vect(e_1,e_2).

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la distance du vecteur $x = (1,1,1,1)$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 4

On considère l'application de $M_n(R)^2$ dans $\mathbb{R}$ donnéee par $(A|B) \longmapsto Tr({}^tAB)$.

1. Montrer que cette application est un produit scalaire, pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que pour toute $A \in M_n(R)$, $|Tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
3. Quel est l'orthogonal de l'espace S des matrices symétriques ?
   En déduire $\inf_{(m_{i,j})\in S} \sum_{i,j}(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ où $A = (a_{i,j}) \in M_n(R)$ est fixée.

Exercice 5

Soit E un espace préhilbertien et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs *unitaires* vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|(x \,|\, e_i)\right|^2.$$

1. Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale.
2. Soit $x \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n}(x \,|\, e_i)e_i$. Montrer que $\|x - y\|^2 = 0$.
3. En déduire que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice6

Soit E un espace préhilbertien réel , et soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x \,|\, v(x)) = 0 \quad \forall x \in E$.

1. Pour $x, y \in E$, simplifier $(x+y \,|\, v(x+y))$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

Exercice 7

Soit d l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à P fait correspondre P'.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $P_n = (X^2-1)^n$.
   (a) Calculer pour tout $k \in [0, n-1], (d^k(P_n))(1)$ et $(d^k(P_n))(-1)$.
   (b) Calculer $(d^n(P_n))(1)$ et $(d^n(P_n))(-1)$.
2. On pose $L_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*; L_n = d^n(P_n)$, et on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.
   (a) Calculer pour tout $p \in [0, n-1], (X^p|L_n)$.
   (b) En déduire que la famille $(L_n)_n$ est orthogonale et libre.