Fonctions usuelles

Exercice 1:
Dans chacun des cas suivants, montrer que f est une bijection de son domaine de définition vers un ensemble à déterminer. Préciser le domaine de définition de sa fonction réciproque f^{-1}, et calculer sa dérivée en indiquant son domaine de définition :

$a)\ f(x) = \sqrt{2x-3}$;

$b)\ f(x) = x^2 - 4x + 5$; $\forall x \geq 2$.

Exercice 2: Montrer que $\forall a,b \succ 0, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$.

Exercice 3: Montrer que $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n est égal à $E(\log_{10} n) + 1$.

Exercice 5: Simplifier les expressions suivantes :

$$1)\ \left(e^{x^2}\right)^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x}} \ ;\ 2)\ x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} \ ;\ 3)\ \log_x\left(\log_x(x^{x^y})\right).$$

Exercice 6: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} ,\ \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}},\ \lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} ,\ \lim_{x\to 0^+} (x^x)^x ,\ \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} ,\ \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^x}{3^x} ,\ \lim_{x\to -\infty} \frac{xe^x}{3^x}.$$

Exercice 7:

A) Résoudre les équations suivantes :

$1)\ 2^{x^3} = 3^{x^2}$; $2)\ x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$; $3)\ x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $4)\ e^x + e^{1-x} = 1 + e$; .

$5)\ 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$,

B) Résoudre les systèmes suivants : $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$; $\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\tan x \tan 2x = 1$. 2) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{3\pi}{4})$. 3) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$

Exercice 9 : 1) Montrer que $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan\frac{p-q}{2}$.

2) En déduire $\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Exercice 10: Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{6}$. 3) $\ln|x| + \ln|x+3| \geq \ln 2 + 2\ln 3$

2) $\arccos x + \arccos\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$. 4) $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$, 5) $\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 11: 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

2) Simplifier $\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$.

Exercice 12: Simplifier pour $x \in \mathbb{R}, \arctan(\tanh x) - \arctan(e^{2x})$.

Exercice 13: Calculer $\arcsin\frac{5}{6} + \arcsin\frac{\sqrt{11}}{6}$ (solution : $\frac{\pi}{2}$)

Exercice 14: Considérons la fonction $f : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Calculer sa dérivée tout en précisant l'ensemble sur lequel ces calculs sont valides.

Exercice 15: Montrer que $\forall x, y \in]-1,1[$, $\arctan h\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \arctan h(x) + \arctan h(y)$.

Exercice 16:2

1) Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

2) En déduire $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(3x) - \left(\arcsin(2x) + \arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{x}\right)$

3) Résoudre l'équation $\arcsin(3x) = \arcsin(2x) + \arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)$.

Exercice 17: Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$.

Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ définit une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $[1, +\infty[$, et exprimer g^{-1} à l'aide de **arcsin** .

Exercice 18: Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *et* $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 19: Soit la fonction f définie par f(x) = $\frac{e^{5x} + e^{-x}}{e^{4x} - 1}$.

Montrer que f(x) = $\frac{ch(3x)}{sh(2x)} = \frac{4ch^2 x - 3}{2shx}$

Exercice 20:

1) Montrer que $\forall x \in]0,1[, 1+x \prec e^{sh(x)} \prec \frac{1}{1-x}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:

   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{p=n}^{kn} sh\frac{1}{p}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 21: Soit $x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ mod } 2\pi$.

1) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

2) Remontrer le même résultat via les complexes.