Intégration

Exercice 1 On considère la fraction $F(x)=\dfrac{x^4-x^3-7x^2+11x-5}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^4-x^3-7x^2+11x-5}{(x-1)(x-2)}$.

Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que $F(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-1}+\dfrac{e}{x-2}$.

En déduire les primitives de F.

Exercice 2 Si n et p sont des entiers naturels, calculer l'intégrale $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(nx)\sin(px)\mathrm{d}x$.

Exercice 3

1. On pose $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{1+2\sin(x)}\mathrm{d}x$: calculer $I+J$, puis I, en déduire J.
2. On pose $A=\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos^2(x)\mathrm{d}x$ et $B=\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin^2(x)\mathrm{d}x$: calculer $A+B$ et $A-B$, puis en déduire A et B.
3. On pose $M=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x$ et $N=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x$: montrer $M=N$, simplifier $M+N$ et en déduire M et N.

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes, pour $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n=\int_0^1 x^n e^x\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cos(x)\mathrm{d}x,\quad c_n=\int_1^2 x^n\ln(x)\mathrm{d}x,\quad d_n=\int_0^{\pi}e^x\cos(nx)\mathrm{d}x,$$

Exercice 5 Calculer: $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2007}(x^2+1)^{1789}\mathrm{d}x \quad \int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}}\frac{\sin(\sin(\tan x))}{\ln(1+x^2)}\mathrm{d}x. \quad \int_0^1\frac{x^3}{(1+x^4)^2}\mathrm{d}x.$

Exercice 6 Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\exp(2x)$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$
4. $f(x)=\cos^3(x)$
5. $f(x)=\sin(x)\cos^3(x)$
6. $f(x)=\sin(x)\cos(3x)$
7. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$
8. $f(x)=\tan(x)$
9. $f(x)=x\exp(2x)$
10. $f(x)=\dfrac{\exp(x)}{2+\exp(2x)}$
11. $f(x)=x^2\exp(-x)$
12. $f(x)=x^2\ln(x)$
13. $f(x)=(x^3+2x^2+x+1)\exp(x)$
14. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
15. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Exercice 7 Calculer des primitives des fonctions f suivantes, en n'oubliant de préciser le domaine de validité de chaque primitive :

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}}$ *(poser $y=1-\sqrt{x}$)*
2. $f(x)=\dfrac{x^2\ln(x)}{(x^3+1)^2}$ *(IPP)*
3. $f(x)=\arctan(\sqrt[3]{x})$ *(poser $y=\sqrt[3]{x}$ et IPP)*
4. $f(x)=\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ *(IPP)*

Exercice8 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue : prouver $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 f^2$.

Exercice 9 Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, telle que : $\forall x \in [a,b],\ f(x) > 0$.
Montrer que : $(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$

Exercice 10 Montrer que, si $0 < a < b$, alors $\ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.
Indication : appliquer l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* à 1 et $\frac{1}{x}$.

Exercice 11 Soit f, une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$ où $a < b$ (i.e) $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$ *(théorème de Riemann-Lebesgue).*

Exercice 12 On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$: $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Pour $x \neq -1$ et $n \geq 1$, établir : $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$.
2. En déduire : $\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2 - u_n$.
3. Justifier l'inégalité $\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx\right| \leq \frac{1}{n+1}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13 Soit n et p sont des entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I(N,0)$ pour tout entier naturel N.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$.
3. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ pour tous les couples (n,p).
4. Déterminer la valeur de $J(q,r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q+1}(\theta)\cos^{2r+1}(\theta)\mathrm{d}\theta$.

Exercice 14 *(Intégrales de Wallis)* Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.
2. Calculer I_0 et I_1 puis montrer, par une intégration par parties : $\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.
3. En déduire que $(n+1)I_nI_{n+1}$ a une valeur constante qu'on déterminera.
4. Etablir la décroissance de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ et en déduire $I_n \sim I_{n+1}$, puis $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Déterminer les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de $\binom{2p}{p}$.
6. Montrer que: $\lim_{p\to+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.