NOMBRES REELS

Enoncé

EXERCICE 1 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$,avec supA > 0.
Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

EXERCICE 2 : Déterminer, si elles existent ,les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

$$A=\left\{1+\frac{1}{n} / n\in\mathbb{N}^*\right\} \ ; \ B=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n} / n\in\mathbb{N}^*\right\} \ ; \ C=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n} / n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

EXERCICE 3 : Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A\subset B$.

Montrer que : $\inf(B)\leq\inf(A) \quad et \ \sup(A)\leq\sup(B)$

EXERCICE 4 : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall(a,b)\in A\times B, a\leq b.$
Montrer que sup A et inf B existent et que $\sup A\leq\inf B$.

EXERCICE 5 : Soient A et B deux parties non vides et majorée de $\mathbb{R}$.
Montrer que sup A, sup B et sup $A\cup B$ existent et sup $A\cup B$ = max (sup A , sup B).

EXERCICE 6 : Soient A et B deux parties non vides et majorée de $\mathbb{R}$.
On note $A+B=\{a+b/(a,b)\in A\times B\}$.
Montrer que A+B est majorée et sup(A+B) = supA + supB .

EXERCICE 7 : Montrer que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8 : Montrer que $\forall x,y\in\mathbb{R}, E(x)+E(y)\leq E(x+y)\leq E(x)+E(y)+1.$

EXERCICE 9 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $E(\frac{E(nx)}{n})=E(x)$.

EXERCICE 10 :

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ .L'objectif de l'exercice est de montrer que $\sum_{k=0}^{n-1}E(x+\frac{k}{n})=E(nx)$.

Posons $m=E(nx)$. Soient $q\in\mathbb{Z}$ et $0\leq r\leq n-1/ m=nq+r$.

1) Montrer que :

i) $\begin{cases}0\leq k\prec n-r\\ k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow E\left(x+\frac{k}{n}\right)=q$

ii) $\begin{cases} n-r \leq k \leq n-1 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow E\left(x+\frac{k}{n}\right)=q+1$

2) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n})=E(nx)$.

EXERCICE 11 :

Considérons l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(1)=1 \\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y) \\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ f(xy)=f(x)f(y) \end{cases}$.

L'objectif de ce problème est de vérifier que $f=Id_{\mathbb{R}}$.

1) Calculer f(0), et f(-1).
2) Montrer que $\forall m\in\mathbb{Z},\ f(m)=m$.
3) Montrer que $\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=r$.
4) I) $\forall \varepsilon \geq 0,\ f(\varepsilon)\geq 0$.
   II) En déduire que l'application f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5) I) Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{E(nx)}{n}=x$.
   II) En déduire que $f=Id_{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 12 :

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

2) En déduire la partie entière $E(S)$; *où* $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}$.

EXERCICE 13 : Simplifier les ensembles suivants : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1-\frac{1}{n}]$ *et* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$.

EXERCICE 14 :

1) Montrer que :

$$\forall x,y\in[0,1],(1-x)(1-y)\leq 1-xy$$

2) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\ldots,x_n\in[0,1],(1-x_1)\ldots(1-x_n)\leq 1-x_1\ldots x_n$$

EXERCICE 15 : Considérons l'application suivante :

$$f:[1,+\infty[\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

1) Vérifier que f(x) est bien définie pour tout $x\in[1,+\infty[$.

2) Montrer que $f/_{[1,2]}=2$ *et* $f/_{[2,+\infty]}=2\sqrt{x-1}$.

   càd : $\left(\forall x\in[1,2],\ f(x)=2\right)$ *et* $\left(\forall x\in[2,+\infty[,\ f(x)=2\sqrt{x-1}\right)$

EXERCICE 16 :

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists a_n,b_n\in\mathbb{N}^*$ *tels que* $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ *et* $3b_n^{\ 2}=a_n^{\ 2}-1$.

2) En déduire que la partie entière $E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ est un entier impaire.