Ensembles et applications
Enoncé :

Logique

Exercice 1:
Donnez la négation de chacune des assertions suivantes :

1) $\exists\, a > 0$, $\exists\, b \geq 0$,$\forall n \in \mathbb{N}$, $na < b$.
2) $\forall x \in E$, $(x \in A \Rightarrow x \notin B)$.

Exercice 2: Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes où f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1) « f s'annule sur $\mathbb{R}$ ».
2) « f est l'application nulle ».

Ensembles :

Exercice 3: Soient A ,B et C trois parties de E.
Montrer que :

1) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
2) $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

Exercice 4: Soient A ,B et C trois parties de E. Montrer les équivalences suivantes :

1) $\begin{cases} A \cup C = A \cup B \\ A \cap C = A \cap B \end{cases} \Leftrightarrow B = C$.
2) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3) $A \cap C = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
4) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$

Applications :

Exercice 5:
Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes.

1) $f : [\,0,1\,] \to [\,-1,1\,]$; $f : x \mapsto x^2$.
2) $g : [0, \pi\,] \to [\,-1,1\,]$; $g : x \to \sin x$.
3) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ ; h : z \mapsto |z|$.

Exercice 6: Soit E un ensemble, et soit $f : E \to E$ une application telle que $fofof = f$.
Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective .

Exercice 7: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
Montrer les implications suivantes :

1) $gof\ \ injective \Rightarrow f\ \ injective$
2) $gof\ \ surjective \Rightarrow g\ \ surjective$
3) $(gof\ \ injective\ et\ f\ \ surjective) \Rightarrow g\ \ injective$
4) $(gof\ \ surjective\ et\ g\ \ injective) \Rightarrow f\ \ surjective$

Exercice 8: Soit $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que :
   a) Pour toute partie A de E, $A \subset f^{-1}(f(A))$
   b) Pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subset B$

2) Montrer que :

a) f est injective $\Leftrightarrow$ pour toute partie A de E, $A = f^{-1}(f(A))$

b) f est surjective $\Leftrightarrow$ pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$

Exercice 9: Soit $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que $\forall A, A' \in \wp(E)$, on a :
   a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
   b) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2) Montrer que $\forall B, B' \in P(F)$, on a :
   a) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
   b) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
   c) $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Exercice 10: Soit $f : E \to F$ une application.

Montrer que :

1) f est injective $\Leftrightarrow$ $\forall A, A' \in P(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
2) f est bijective $\Leftrightarrow$ $\forall A \in P(E),\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Exercice 11: Soient A et B deux parties de E.

On rappelle que χ_A est l'application de E vers E définie par :

Pour tout $x \in E, \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x \in A \\ 0 \ \ si \ \ x \notin A \end{cases}$.

1) Montrer que $\chi_{A \cap B} = \chi_A . \chi_B$

2) Montrer que si $A \cap B = \varnothing$ alors $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$.

Exercice 12: Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i} \end{cases}$.

1) Montrer que f est bijective.
2) Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Relation d'ordre

Exercice 13:

Soit $\Re$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

(x , y) $\Re$ (x0, y0) si et seulement si |x − x0| $\leq$ y − y0 .

Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

Exercice 14:

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation : $(x, y)\Re(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \ et \ y \leq y'$

Vérifier que $\Re$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total?

Exercice 15:

On munit $\mathbb{N}^*$ de la relation $\Re$ définie par : $p\Re q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n$

Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.