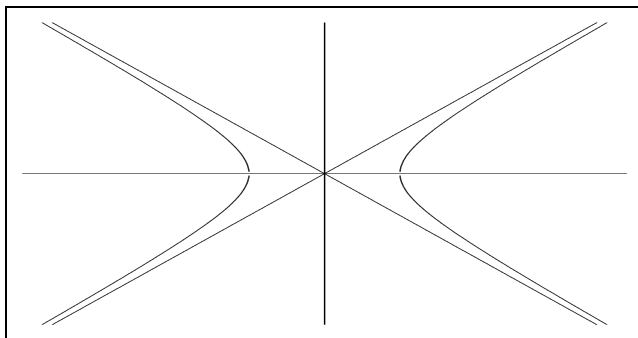


CCP 2013. Option MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

EXERCICE



Les tangentes en les points $(\pm 1, 0)$ sont verticales et les asymptotes ont pour équation $x^2 - 13y^2 = 0$.

Outre le couple $(1, 0)$ qui est évidemment solution, l'algorithme ci-dessous montre que le problème cherché a une unique autre solution : le couple $(649, 180)$.

Algorithme

```
L <- (1,0)
Pour y de 1 à 200 faire
  x <- sqrt(1+13*y*y)
  Si int(x) = x
    L <- L, (x,y)
  Fin si
Fin pour
-> L
```

Traduction CAML

```
let test () =
  let l = ref [(1,0)] in
  for y=1 to 200 do
    let x = sqrt(float_of_int(1+13*y*y)) in
    if (float_of_int(int_of_float x) = x)
    then l := (int_of_float x,y) :: !l
  done;
  !l
;;
```

Traduction MAPLE

```
test := proc()
  s := [1,0]:
  for y from 1 to 200 do
    x := sqrt(1+13*y*y):
    if (floor(x) = x) then s := s, [x,y] fi
  od:
  s
end:
```

Traduction PYTHON

```
from math import *
def test():
  l = [(1,0)]
  for y in range(1,201):
    x = sqrt(13*y*y+1)
    if (int(x) == x):
      l.append((int(x),y))
  return l
```

PROBLÈME

- 1)
- a) Si $a \in T_1(\mathbb{R})$ en particulier il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a$ donc $a \geq 0$. Réciproquement si $a \geq 0$ alors, pour tout entier $n \geq 2$, on a $b^n = a$ avec $b = \sqrt[n]{a}$. Donc $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. \square
- b) $\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\theta_k} \right\}_{k=0..n-1}$ avec $\theta_k = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}$. \square
- c) 0 est évidemment TPC ainsi que tout complexe non nul par la question précédente. Donc $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. \square
- 2)
- a) Si $A \in T_p(\mathbb{K})$, pour tout entier $n \geq 1$ il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$.
Il en découle que $\det A = (\det B)^n$ donc que $\det A \in T_1(\mathbb{K})$ puisque $\det B \in \mathbb{K}$. \square
- b) Il en résulte par exemple que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin T_2(\mathbb{R})$, d'après la question 1)a), puisque $\det A < 0$. \square
- 3) Cette condition nécessaire n'est pas suffisante car la matrice A proposée est bien à déterminant positif mais n'est pas toute puissante.
En effet s'il existait une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, on aurait (avec les notations de l'énoncé) :

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 & (1) \\ d^2 + bc = -2 & (2) \\ b(a+d) = 0 & (3) \\ c(a+d) = 0 & (4) \end{cases}$$

(1) implique que b et c sont non nuls.
(3) et (4) impliquent alors que $a+d=0$ donc $a^2 = d^2$.
Les équations (1) et (2) sont alors incompatibles. \square

4)
 a) En remplaçant la première colonne $C1$ du déterminant caractéristique par $C1 + C3$ on peut factoriser par $\lambda - 2$.
 Puis en remplaçant la troisième ligne $L3$ par $L3 - L1$ on se ramène à un déterminant d'ordre 2.
 Il vient ainsi que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$.
 Il en découle que A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_2 = 2$.
 Or le système $AX = 2X$ se réduit à $2x - 3y - 2z = 0$ donc E_2 est le plan engendré par exemple par $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$
 et $\vec{e}_2 = (0, 2, -3)$ et A est bien diagonalisable. \square

b) Un calcul immédiat prouve que la droite E_1 est engendrée par $\vec{e}_3 = (1, 1, -1)$.
 Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base diagonalisante $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $D = \text{diag}(2, 2, 1)$ de sorte que $A = PDP^{-1}$.
 Pour $n \geq 1$ soit $B_n = PD_nP^{-1}$ avec $D_n = \text{diag}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}, 1)$. Alors $B_n^n = A$ donc A est TPR. \square

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. La calculatrice fournit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ainsi que
 $B_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & -3 + 3\sqrt{2} & -2 + 2\sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{2} & -3 + 4\sqrt{2} & -2 + 2\sqrt{2} \\ -2 + 2\sqrt{2} & 3 - 3\sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $B_3 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt[3]{2} & -3 + 3\sqrt[3]{2} & -2 + 2\sqrt[3]{2} \\ 2 - 2\sqrt[3]{2} & -3 + 4\sqrt[3]{2} & -2 + 2\sqrt[3]{2} \\ -2 + 2\sqrt[3]{2} & 3 - 3\sqrt[3]{2} & 2 - \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$

5) A est la matrice de l'homothétie de rapport -1 donc de la rotation d'angle π . De sorte que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $B_n^n = A$ avec $B_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$ et A est TPR. \square

6) Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ nilpotente.
 a) Il existe $r \geq 1$ tel que $N^r = 0$ donc X^r annule N de sorte que 0 est la seule valeur propre de N . Ainsi $\chi_N = (-1)^p X^p$ et $N^p = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton. \square

b) Si N est TPK, en particulier il existe B telle que $B^p = N$ donc $B^{p^2} = N^p = 0$ de sorte que B est nilpotente et donc $B^p = 0$ i.e. $N = 0$. \square

7) Comme les λ_i pour i de 1 à k sont deux à deux distincts, les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$ sont premiers entre eux deux à deux et le théorème de décomposition des noyaux joint au théorème de Cayley-Hamilton fournit la décomposition cherchée. \square

8)
 a) Si v commute avec u alors v commute avec $Q(u)$ donc $\text{Ker } Q(u)$ est stable par v . \square
 b) u commute avec $u - \lambda_i \text{id}$ et en appliquant la question précédente (avec $v = u$, $u = u - \lambda_i \text{id}$ et $Q = X^{r_i}$), il vient que C_i est stable par u . \square

9) Comme C_i est stable par u donc par $u - \lambda_i \text{id}$, il vient pour tout $\vec{x} \in C_i$:
 $(u_{C_i} - \lambda_i \text{id}_{C_i})^{r_i}(\vec{x}) = (u - \lambda_i \text{id})^{r_i}(\vec{x}) = \vec{0}$. \square

10) Ainsi $u_{C_i} = \lambda_i \text{id}_{C_i} + v_i$ où v_i est un endomorphisme nilpotent de C_i .
 Dans toute base de C_i la matrice de u_i est donc de la forme $A'_i = \lambda_i \text{Id}_{p_i} + N_i$ avec N_i nilpotente.
 La matrice de u dans toute base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_k$ est donc $A' = \text{diag}(A'_1, A'_2, \dots, A'_k)$ qui est bien de la forme demandée. \square

11) Supposons A'_i TPK pour tout i de 1 à k et soit $n \geq 1$ un entier quelconque.
 Pour tout i , il existe $B'_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $(B'_i)^n = A'_i$.
 Alors $(B')^n = A'$ par calcul par blocs avec $B' = \text{diag}(B'_1, B'_2, \dots, B'_n)$ donc $B^n = A$ avec $B = PB'P^{-1}$.
 Ainsi A est bien TPK. \square

12)
 a) Si V est le polynôme nul on a bien $V = X^p Q$ avec Q le polynôme nul.
 Sinon notons k la valuation de V : $V = a_k X^k + a_{k+1} X^{k+1} + \dots + a_m X^m$ avec $a_k \neq 0$. Alors $V(x) \sim a_k x^k$ au voisinage de 0 de sorte que $x^k = o(x^p)$ ce qui entraîne $k > p$. Il en découle que X^p divise V . \square

b) Notons $U(x) = 1 + \frac{1}{n}x + \dots + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1) \dots (\frac{1}{n} - p + 1)}{p!} x^p$ de sorte que $(1 + x)^{1/n} = U(x) + o(x^p)$.

Il vient alors $1 + x = (U(x) + o(x^p))^n = U(x)^n + \sum_{k=1}^n C_n^k U(x)^{n-k} o(x^{kp})$

Or $U(x) \sim 1$ donc $U(x)^{n-k} o(x^{kp}) = o(x^{kp}) = o(x^p)$ pour k de 1 à n de sorte que $1 + x = U(x)^n + o(x^p)$ \square

c) Résulte immédiatement de a) et du fait que $1 + X - U(X)^n$ est un polynôme. \square

13)

a) Soit $n \geq 1$ un entier quelconque. Avec les notations de la question précédente : $(1 + X)(N) = U(N)^n + N^p Q(N)$ par le classique morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Or $N^p = 0$ par la question 6)a).

Ainsi $\text{Id} + N = U(N)^n$ donc $\text{Id} + N$ est TP \mathbb{K} . \square

b) Soit λ non nul. Il vient $\lambda \text{Id}_p + N = \lambda(\text{Id}_p + N')$ avec $N' = \frac{1}{\lambda}N$ clairement nilpotente.

Par la question précédente, il existe $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $(B')^n = \text{Id}_p + N'$.

Si λ est en outre TP \mathbb{K} , il existe λ' tel que $(\lambda')^n = \lambda$ et $B^n = \lambda \text{Id}_p + N$ avec $B = \lambda' B'$ et $\lambda \text{Id}_p + N$ est TP \mathbb{K} . \square

14)

a) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ alors, par la question 10), A est semblable à une matrice $B = \text{diag}(A'_1, A'_2, \dots, A'_k)$ avec $A'_i = \lambda_i \text{Id}_{p_i} + N_i$ où les matrices N_i sont nilpotentes et $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ est l'ensemble des valeurs propres de A .

Si $A \in GL_p(\mathbb{C})$, $\lambda_i \neq 0$ donc λ_i est TPC (question 1c) donc A'_i est TPC par la question précédente.

La question 11) prouve alors que A est TPC \square

b) La question 6)b) prouve qu'une matrice nilpotente non nulle n'est pas TPC. \square

15) Exemple 1 :

Soit la matrice d'ordre 4 diagonale par bloc d'ordre 2 : $A = \text{diag}(R, (0))$ où $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le polynôme caractéristique de A est (matrice triangulaire) $X^2(X^2 + 1)$ donc A est non inversible (0 est valeur propre) et non diagonalisable sur \mathbb{R} (polynôme caractéristique non scindé sur \mathbb{R}).

Cependant A est TP \mathbb{R} car, pour tout entier $n \geq 1$, on a $B_n^n = A$ avec $B_n = \text{diag}(R_n, (0))$ où R_n est la matrice de

la rotation d'angle $\frac{\pi}{2n}$: $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2n}) & -\sin(\frac{\pi}{2n}) \\ \sin(\frac{\pi}{2n}) & \cos(\frac{\pi}{2n}) \end{pmatrix} \square$

Exemple 2 où A n'est même pas diagonalisable sur \mathbb{C} (elle l'est dans l'exemple précédent) :

Remplaçons dans l'exemple précédent R par la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le spectre de A est $(1, 1, 0, 0)$ mais le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par \vec{e}_1 ce qui prouve que A est non inversible et non \mathbb{C} -diagonalisable.

Or $S = \text{Id}_2 + N$ avec N nilpotente car $N^2 = 0$. Par la question 13)b), il existe $S_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S_n^n = S$. Alors $B_n^n = A$ avec $B_n = \text{diag}(S_n, (0)) \square$

————— FIN —————