Concours National Commun - Session 2015

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II
Filière MP

Sur la non continuité de la diagonalisation

Corrigé par M.TARQI [1]

$1^{\text{ère}}$ partie
Résultats préliminaires

1.1 **Étude de l'ensemble $\mathscr{U}_2$**

1.1.1 On sait que pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$. Donc χ_A admet deux racines réelles distinctes si, et seulement si, le discriminant $(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4\det A > 0$. D'où $\mathscr{U}_2 = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})/(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4\det A > 0\}$.

1.1.2 L'application $A \mapsto \mathrm{Tr}\, A$ étant linéaire et $\dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ étant finie, donc l'application Tr est continue.
D'autre part, pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note $C_1(A)$ et $C_2(A)$ les deux colonnes de A, on a donc la décomposition :

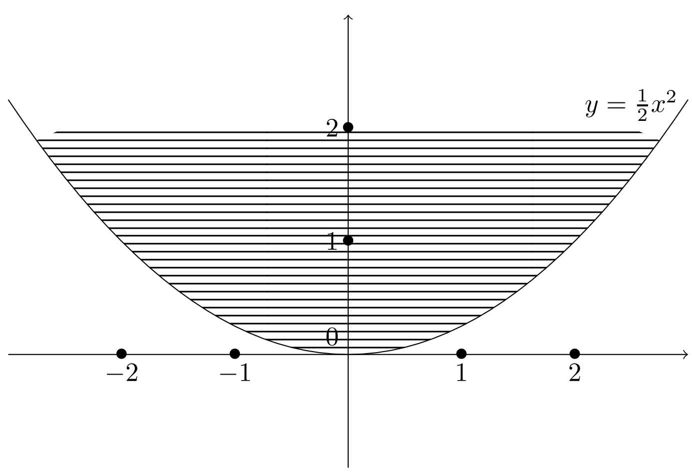
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l"] \arrow[rr, bend right, "\det = b \circ l"'] & (C_1(A), C_2(A)) \arrow[r, "b"] & \det_{\mathscr{B}}(C_1(A), C_2(A))
\end{tikzcd}$$

où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

- l liéaire en dimension finie, donc elle est continue.
- b bilinéaire en dimension finie, donc elle est continue. Donc $\det = b \circ l$ est continue.

1.1.3 Il est clair que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{U}_2$. De plus, d'après ce qui précède, l'application $\varphi : A \mapsto (\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4\det A$ est continue sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\mathscr{U}_2 = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

1.1.4



Si $A \in \mathscr{U}_2$, alors $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det A > 0$ ou encore $\dfrac{(\mathrm{Tr}\, A)^2}{4} > \det A$, donc l'ensemble $\{(\mathrm{Tr}\, A, \det A) \;/\; A \in \mathscr{U}_2\}$ est une partie de la partie hachurée.

1. M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

1.1.5 Si $M \in \mathscr{U}_2$, alors χ_A est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Notons λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{U}_2$. Le sous espace propre associé à λ_i ($i = 1, 2$) est caractérisé par la droite vectorielle $(\lambda_i - a)x - by = 0$, dirigée par le vecteur $(b, \lambda_i - a)$ car $b \neq 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Posons donc $f(M) = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$(la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base de vecteurs propre de M). On a bien $f(M)^{-1}Mf(M) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

1.2 **Commutant d'une matrice**

1.2.1 Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{C}(A)$, alors $AM = MA$ ou encore $\forall i, j$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{ik}a_{kj}$ et comme A est diagonale, alors $a_{ii}m_{ij} = m_{ij}a_{jj}$ et donc $(\alpha_i - \alpha_j)m_{ij} = 0$ et comme $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$), alors $m_{ij} = 0$ et donc M est diagonale. La réciproque est claire puisque toute matrice diagonale commute avec A.

1.2.2 L'égalité $UAU^{-1} = VAV^{-1}$ s'écrit encore $V^{-1}UA = AV^{-1}U$, donc $V^{-1}U$ est diagonale d'après la question 1.2.1.

1.3 **Une CNS de conjugaison à une matrice diagonale**

D'après le cours la condition est suffisante. D'autre part, si $P^{-1}MP = D$ alors M et D ont même polynôme caractéristique et donc même valeurs propres, c'est-à-dire les coefficients diagonaux de D. Notons $C_, C_2, ..., C_n$ les colonnes de P et posons $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$, alors la relation $P^{-1}MP = D$ devient $MC_i = d_iC_i$, comme C_i est non nul, alors d_i est une valeur propre de M et C_i est un vecteur propre associé.

$2^{\text{ème}}$ partie
Quelques propriétés du groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$

2.1 Il est clair que $I_n \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, en effet, si $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ alors A est inversible et $A^{-1} =^t A$. Si $A, B \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t(A^{-1}B)A^{-1}B =^t B^t(A^{-1})A^{-1}B =^t B(A^tA)^{-1}B = I_n$, donc $A^{-1}B \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.
L'application $\varphi : A \mapsto \det A$ est un morphisme de groupe, donc $SO_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{1\})$ est un sous-groupe de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

2.2 On sait qu'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, \\ ab + cd = 0, \\ ad - bc = 1. \end{cases}$$

Supposons encore $bd \neq 0$; alors $ab + cd = 0$ s'écrit $\dfrac{a}{d} = -\dfrac{c}{b} = \alpha$, soit $a = \alpha d$ et $c = -\alpha b$. Les trois autres équations s'écrivent $\alpha^2(d^2 + b^2) = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ et $\alpha(a^2 + b^2) = 1$. Mais les deux premières impliquent $\alpha^2 = 1$, ou $\alpha = \pm 1$. La troisième imposent le signe $+$ à α ; et donc $\alpha = 1$. Donc on obtient

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$.
Si $bd = 0$ on obtient les matrices I_2 et $-I_2$.

L'autre inclusion est évidente.

2.3 Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

2.3.1 Les applications $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc l'application Φ aussi est continue sur $\mathbb{R}$.

2.3.2 Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$, donc A est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. D'autre part, on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ et donc $A = \Phi(\theta)$. Ceci montre que $\Phi(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$.

2.3.3 L'application Φ étant continue et $\mathbb{R}$ étant connexe par arcs, donc $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs comme image d'un connexe par arcs par une application continue.

2.4 Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs pour $n \geq 3$.

2.4.1 On a $\det U = \det I_p \det(-I_q) \det \prod_{i=1}^{r} \Phi(\theta_i) = (-1)^q$, donc $U \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, q est paire.

2.4.2 Soit $U \in SO_n(\mathbb{R}) \backslash \{I_n\}$.

(i) Dans ce cas q est paire ($q = 2q'$). On pose alors $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}$, et donc $P^{-1}UP$ prendra la forme demandée avec $s = q' + r$.

(ii) Il est clair que $\forall t \in [0,1]$, $\Gamma(t) \in SO_n(\mathbb{R})$. Par composition des applications on peut vérifier que l'application Γ est continue sur $\mathbb{R}$. On a bien $\Gamma(0) = I_n$ et $\Gamma(1) = U$.

2.4.3 Soient U_1 et U_2 deux éléments de $SO_n(\mathbb{R})$, alors il existe deux applications continues Γ_1 et Γ_2 défines sur $[0,1]$ à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$ telles que $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = I_n$, $\Gamma_1(1) = U_1$ et $\Gamma_2(1) = U_2$. L'application γ définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$, par $\gamma(t) = \Gamma_1(1-t)\Gamma_2(t)$, est continue sur $[0,1]$ et vérifie $\gamma(0) = U_1$ et $\Gamma_2(1) = U_2$. Ceci montre que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

2.5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.

2.5.1 L'application $M \mapsto^t M$ étant linéaire en dimension finie, donc elle est continue.

2.5.2 Pour tout $U \in SO_n(\mathbb{R})$, on a $U^{-1} = (\det U)^{-1} \times^t \mathrm{Com}(U)$ où $\mathrm{Com}(U)$ désigne la comatrice de U. Cette expression, montre que les coefficients de U^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de U, ce qui montre que l'application $U \mapsto U^{-1}$ est continue sur $SO_n(\mathbb{R})$.

2.5.3 Par composition l'application $U \mapsto UAU^{-1}$ est continue sur $SO_n(\mathbb{R})$, donc son image, c'est-à-dire $\{UAU^{-1} / U \in SO_n(\mathbb{R})\}$ est connexe par arcs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3$^{\text{ème}}$ partie
Non continuité de la diagonalisation dans tout l'ouvert $\mathscr{U}_2$

3.1

3.1.1 D'après la question 3.1 $C_1(M)$ et $C_2(M)$ sont des vecteurs propres de M. Notons λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de M telles que $MC_1(M) = \lambda_1 C_1(M)$ et $MC_2(M) = \lambda_2 C_2(M)$, on obtient donc ${}^tC_1(M)^t M = \lambda_1^t C_1(M)$ puis ${}^tC_1(M) M C_2(M) = \lambda_1^t C_1(M) C_2(M)$ (car M est symétrique), d'où :

$$(\lambda_2 - \lambda_1)^t C_1(M) C_2(M) = 0,$$

et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors ${}^tC_1(M)C_2(M) = 0$.

3.1.2 Les deux colonnes forment une base orthonormale , donc la matrice est orthogonale.

3.1.3 Puisque la matrice précédente est orthogonale alors $\alpha(M)^2 = 1$. Les colonnes de $g_2(M)$ forment une base orthonormale , donc la matrice est orthogonale, donc $g_2(M)$ est orthogonale, de plus $\det g_2(M) = \alpha(M) \det_{\mathscr{B}} \left(\frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, \frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right) = \alpha(M)^2 = 1$, où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. D'où $g_2(M) \in SO_n(\mathbb{R})$.

3.1.4 La continuité de g_2 résulte de celle de f et par composition des applications. Les colonnes de $g_2(M)$ forment une base de vecteurs propres de M, donc $g_2(M)^{-1} M g_2(M)$ est diagonale.

3.2

3.2.1 $\forall U \in SO_2(\mathbb{R}), UBU^{-1}$ est semblable à B, donc admet deux valeurs propres distinctes et donc $UBU^{-1} \in \mathscr{U}_2$, comme $U \in SO_2(\mathbb{R})$ alors $U^{-1} =^t U$ et donc $UBU^{-1} \in \mathscr{S}_2$. D'où $\{UBU^{-1} / U \in SO_2(\mathbb{R})\} \subset \mathscr{U}_2 \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

3.2.2 D'après ce qui précède $h_2(M)^{-1} M h_2(M)$ est diagonale. Si $M \in \mathscr{S}_B$, alors M et B sont semblables, il est de même de $h_2(M)^{-1} M h_2(M)$ et B. Donc les seules valeurs propres possibles sont α et β. Donc les valeurs possibles de $h_2(M)^{-1} M h_2(M)$ sont $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

3.2.3 D'après l'étude précédente $h_2(M)^{-1} M h_2(M)$ prend deux valeurs possibles $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Mais l'application $M \mapsto h_2(M)^{-1} M h_2(M)$ étant continue, donc est une constante.

3.2.4 Par la permutation des colonnes $C_1(M)$ et $C_2(M)$ de $f_2(M)$ on peut se ramener au cas $\forall M \in \mathscr{S}_B,\ \ h_2(M)^{-1}Mh_2(M) = B$.

3.3

3.3.1 On a, pour tout $U \in SO_2(\mathbb{R})$, $h_2(UBU^{-1})^{-1}UBU^{-1}h_2(UBU^{-1}) = B$ ou encore $h_2(UBU^{-1})^{-1}UB = Bh_2(UBU^{-1})^{-1}$, donc $h_2(UBU^{-1})^{-1}U$ est diagonale d'après la question 1.2.

Posons alors $h_2(UBU^{-1})^{-1}U = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Comme $U \in SO_2(\mathbb{R})$ et $h_2(UBU^{-1}) \in SO_2(\mathbb{R})$, alors $h_2(UBU^{-1})^{-1}U \in SO_2(\mathbb{R})$ donc $x^2 = y^2 = 1$ et $xy = 1$. D'où $h_2(UBU^{-1})^{-1}U = \pm I_2$.

3.3.2 Pour $M \in \mathscr{S}_B$ et $D = \pm I_2$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \circ \psi_2(M, D) &= \varphi_2(h_2(M)D) \\
&= (h_2(M)DBD^{-1}h_2(M)^{-1}, h_2(h_2(M)DBD^{-1}h_2(M)^{-1})^{-1}h_2(M)D) \\
&= (h_2(M)Bh_2(M)^{-1}, h_2(M)h_2(M)^{-1}D) \\
&= (M, D)
\end{aligned}$$

De même , pour tout $U \in SO_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_2 \circ \varphi_2(U) &= \psi_2(UBU^{-1}, h_2(UBU^{-1})^{-1}U) \\
&= h_2(UBU^{-1})h_2(UBU^{-1})^{-1}U \\
&= U
\end{aligned}$$

Donc φ_2 et ψ_2 sont des bijections réciproque l'une de l'autre.

3.3.3 Par composition des applications, l'application $U \mapsto \mathrm{Tr}(h_2(UBU^{-1})^{-1}U)$ est continue sur $SO_2(\mathbb{R})$ et comme $h_2(UBU^{-1})^{-1}U = \pm I_2$, alors cette application prend ses valeurs dans $\{-2, 2\}$. Mais d'après la question 3.3.2, il existe U_1 et U_2 dans $SO_2(\mathbb{R})$ tels que $h_2(U_1BU_1^{-1})^{-1}U_1 = I_2$ et $h_2(U_2BU_2^{-1})^{-1}U_2 = -I_2$ car φ_2 est surjective. Donc l'application $U \mapsto \mathrm{Tr}(h_2(UBU^{-1})^{-1}U$ a pour image $\{-2, 2\}$.

3.3.4 L'application $U \mapsto \mathrm{Tr}(h_2(UBU^{-1})^{-1}U)$ étant continue et $SO_2(\mathbb{R})$ étant connexe par arcs, donc son image doit être connexe par arcs ce qui est absurde d'après la question 3.3.3.

$4^{\text{ème}}$ partie
Non continuité de la diagonalisation dans tout l'ouvert $\mathscr{U}_n$ pour $n \geq 3$

4.1

4.1.1 Comme dans le cas $n = 2$, les vecteurs $C_1(M), C_2(M), ..., C_n(M)$ sont des vecteurs propres de M. Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les différentes valeurs propres de M telles que $MC_i(M) = \lambda_i C_i(M)$, $i = 1, 2, ..., n$. On obtient donc, pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$, ${}^tC_i(M)^tM = \lambda_i^t C_i(M)$ puis ${}^tC_i(M)MC_j(M) = \lambda_i^t C_i(M)C_j(M)$ (car M est symétrique), d'où :

$$(\lambda_j - \lambda_i)^t C_i(M)C_j(M) = 0,$$

et comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors ${}^tC_i(M)C_j(M) = 0$. Donc les vecteurs normés $\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, ..., \dfrac{C_n(M)}{\|C_n(M)\|_2}$ forment une base orthonormale .

4.1.2 Les colonnes de la matrice $g_n(M)$ forment une base orthonormale , donc c'est une matrice orthogonale. De plus $\det g_n(M) = \alpha(M) \det_{\mathscr{B}}\left(\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, ..., \dfrac{C_n(M)}{\|C_n(M)\|_2}\right) = \alpha(M)^2 = 1$, où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'où $g_n(M) \in SO_n(\mathbb{R})$.

4.1.3 La continuité de g_n résulte de celle de f_n et par composition des applications. Les colonnes de $g_n(M)$ forment une base de vecteurs propres de M, donc $g_n(M)^{-1}Mg_n(M)$ est diagonale.

4.2

4.2.1 $\forall U \in SO_n(\mathbb{R})$, UAU^{-1} est semblable à A, donc admet deux valeurs propres distinctes et donc $UAU^{-1} \in \mathscr{U}_n$, comme $U \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $U^{-1} = {}^t U$ et donc $UAU^{-1} \in \mathscr{S}_n$. D'où $\{UAU^{-1}/U \in SO_n(\mathbb{R})\} \subset \mathscr{U}_n \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

4.2.2 D'après ce qui précède $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$ est diagonale. Si $M \in \mathscr{S}_A$, alors M et A sont semblables, il est de même de $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$ et A. Donc il y a exactement $n!$ possibilité $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$.

4.2.3 D'après l'étude précédente $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$ prend un nombre fini de valeurs. Mais l'application $M \mapsto h_2(M)^{-1}Mh_2(M)$ étant continue, donc elle est constante.

4.2.4 Par la permutation des colonnes de la matrice $f_n(M)$, on peut se ramener au cas où

$$h_n(M)^{-1}Mh_n(M) = A$$

pour tout $M \in \mathscr{S}_A$.

4.3

4.3.1 On a, pour tout $U \in SO_n(\mathbb{R})$, $h_n(UAU^{-1})^{-1}UAU^{-1}h_n(UAU^{-1}) = A$ ou encore $h_n(UAU^{-1})^{-1}UA = Ah_n(UAU^{-1})^{-1}$, donc $h_n(UAU^{-1})^{-1}U$ est diagonale d'après la question 1.2 et dans $SO_n(\mathbb{R})$ (h_n à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$.

4.3.2 Une matrice diag$(x_1, x_2, ..., x_n) \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\forall i = 1, 2, ..., n$, $x_i^2 = 1$ et $x_1x_2...x_n = 1 > 0$. Notons Δ_p l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenant exactement $2p$ coefficients égales à -1 et les autres égales à 1.

- Si $n = 2q$, alors on a $\mathscr{D}_n = \bigcup\limits_{p=0}^{q} \Delta_p$ et donc $\operatorname{card}\mathscr{D}_n = \sum\limits_{p=0}^{q} \operatorname{card}\Delta_p = \sum\limits_{p=0}^{q} \complement_{2q}^{2p}$.
- Si $n = 2q+1$, alors on a $\mathscr{D}_n = \bigcup\limits_{p=0}^{q} \Delta_p$ et donc $\operatorname{card}\mathscr{D}_n = \sum\limits_{p=0}^{q} \operatorname{card}\Delta_p = \sum\limits_{p=0}^{q} \complement_{2q+1}^{2p}$.

4.3.3 Pour $M \in \mathscr{S}_A$ et $D =\in \mathscr{D}_n$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_n \circ \psi_n(M, D) &= \varphi_2 n(h_n(M)D) \\
&= (h_n(M)DAD^{-1}h_n(M)^{-1}, h_n(h_n(M)DBD^{-1}h_n(M)^{-1})^{-1}h_n(M)D) \\
&= (h_n(M)Ah_n(M)^{-1}, h_n(M)h_n(M)^{-1}D) \\
&= (M, D)
\end{aligned}$$

De même , pour tout $U \in SO_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_n \circ \varphi_n(U) &= \psi_n(UAU^{-1}, h_n(UAU^{-1})^{-1}U) \\
&= h_n(UAU^{-1})h_n(UAU^{-1})^{-1}U \\
&= U
\end{aligned}$$

Donc φ_n et ψ_n sont des bijections réciproque l'une de l'autre.

4.3.4 Par composition des applications, l'application $U \mapsto \operatorname{Tr}(h_n(UAU^{-1})^{-1}U$ est continue sur $SO_2(\mathbb{R})$ et comme $h_n(UAU^{-1})^{-1}U \in \mathscr{D}_n$, alors cette application prend ses valeurs dans $\operatorname{Tr}(\mathscr{D}_n)$. Mais d'après la question 4.3.2, $\forall D \in \mathscr{D}_n$, il existe U tel que $h_n(UAU^{-1})^{-1}U = D$ car φ_n est surjective. Donc l'application $U \mapsto \operatorname{Tr}(h_n(UAU^{-1})^{-1}U$ a pour image $\operatorname{Tr}(\mathscr{D}_n)$.

4.3.5 Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'une telle application f_n existe, donc l'étude faite dans cette partie, montre que l'image du connexe par arcs $SO_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $U \mapsto \operatorname{Tr}(h_n(UAU^{-1})^{-1}U)$ n'est pas connexe par arcs puisque $\operatorname{Tr}(\mathscr{D}_n)$ est fini et de cardinal strictement supérieur à 1.

• • • • • • • • • • •