Problème 2

Partie I: Cas particulier : variables aléatoires discrètes finies

1. $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors e^{tZ} est finie, par le théorème du transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_Z(t) = \mathbb{P}(Z=0) + e^t \mathbb{P}(Z=1) = p\left(e^t - 1\right) + 1$$

2. X est finie, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ la variable e^{tZ} est finie, en particulier elle admet une espérance, par le théorème du transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{r} p_i e^{tx_i}$$

Donc M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout entier naturel k,

$$M_X^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{r} x_i^k e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i)$$

En particulier $M_X^{(k)}(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i^k \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$

3. (a) La famille $([X = x_i])_{i \in [\![1,r]\!]}$ est un système complet d'événements, en particulier $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. En outre pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1,r]\!]$, on a $e^{tx_i} > 0$, donc $M_X(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} e^{tx_i}\mathbb{P}(X = x_i) > 0$. Ainsi φ_X est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de M_X est donné par

$$M_X(t) = M_X(0) + tM_X'(0) + \circ(t) = 1 + t\mathbb{E}(X) + \circ(t)$$

Par composition $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(X) + \circ(1)$, donc φ_X est prolongeable par continuité en 0.

(b) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de M_X est donné par

$$M_X(t) = M_X(0) + tM_X'(0) + \frac{M_X''(0)}{2}t^2 + \circ(t^2) = 1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2 + \circ(t^2)$$

Par composition

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{t}\ln(M_X(t)) \\
&= \frac{1}{t}\ln\left(1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2 + \circ(t^2)\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2 - \frac{\left(t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2\right)^2}{2} + \circ(t^2)\right) \\
&= \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2}{2}t + \circ(t)
\end{aligned}$$

Donc φ_X est dérivable en 0 et $\varphi_X'(0) = \dfrac{\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2}{2} = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{2}$

(c) i. Soit $u \leqslant 0$, d'après la formule de Taylor avec reste intégrale, on a

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} e^t \, \mathrm{d}t$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{(u-t)^2}{2} e^t$ est continue et positive sur $[u, 0]$, donc $\displaystyle\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} e^t \, \mathrm{d}t \leqslant 0$, soit $e^u \leqslant 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2$

ii. Soit $t > 0$, comme $\forall i \in [\![1, r]\!]$ on a $x_i \leqslant 0$, alors

$$\forall i \in [\![1, r]\!] , \quad e^{tx_i} \leqslant 1 + tx_i + \frac{t^2}{2} x_i^2$$

Par le théorème du transfert et par positivité de la probabilité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) &= \sum_{i=1}^{r} e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \left(1 + tx_i + \frac{t^2}{2} x_i^2\right) \mathbb{P}(X = x_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_i) + t \sum_{i=1}^{r} x_i \mathbb{P}(X = x_i) + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\
&\leqslant 1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{t^2}{2} \mathbb{E}\left(X^2\right)
\end{aligned}$$

Finalement, la croissance de ln et l'inégalité de convexité : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$, donnent

$$\varphi_X(t) \leqslant \mathbb{E}(X) + \frac{t}{2} \mathbb{E}\left(X^2\right)$$

Une telle inégalité reste valable si $t = 0$, car $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(X)$

(d) i. Quitte à réordonner les x_i, on peut supposer que $x_1 > x_2 > \ldots > x_r$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i = 0$. Cela signifie que, quelque soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(t) = 0$, autrement dit pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^{tx_i} = 0$. Factorisons par e^{tx_1} : $e^{tx_1} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^{t(x_i - x_1)} = 0$. Mais $e^{tx_1} \neq 0$ donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^{t(x_i - x_1)} = 0$.
Lorsque $t \to +\infty$ alors $e^{t(x_i - x_1)} \to 0$ (pour tout $i \geqslant 2$, car $x_i - x_1 < 0$). Donc pour $i \geqslant 2$, $\lambda_i e^{t(x_i - x_1)} \to 0$ et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve : $\lambda_1 = 0$.
Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$ et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Donc la famille $(f_1, \cdots, f_r)$ est libre.

ii. $\Rightarrow$) Si X et Y suivent la même loi, alors $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$. On tire $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et par le théorème du transfert pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(Y = x) = \mathbb{E}\left(e^{tY}\right)$$

Donc les fonctions φ_X et φ_Y sont égales ;

$\Leftarrow$) Posons $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$ l'ensemble des valeures prises effectivement par X et Y tels que $x_1 > \cdots > x_n$ et $y_1 > \cdots > y_m$. L'hypothèse $\varphi_X = \varphi_Y$ donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} e^{ty_j} \mathbb{P}(X = y_j)$$

Par unicité de l'écriture $n = m$, $x_i = y_i$ et $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = y_i)$

(e) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, les deux variables e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes, car X et Y le sont, donc

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}e^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right)$$

Par définition, on a

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{1}{t}\ln(M_{X+Y}(t)) = \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\right) + \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{tY}\right)\right) = \varphi_X(t) + \varphi_Y(t)$$

Pour $t = 0$, on a $\varphi(0) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \varphi_X(0) + \varphi_Y(0)$. Bref

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$$

(f) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(s,p)$, alors $X = \sum_{i=1}^{s} X_i$, où $X_1, \cdots, X_s$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $t \in \mathbb{R}$, les variables $e^{tX_1}, \cdots, e^{tX_s}$ sont indépendantes, donc

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{s} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{s}\mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) = \left(p\left(e^t - 1\right) + 1\right)^s$$

(g) $\Leftarrow$) Supposons que X est une variable aléatoire réelle symétrique, alors $X(\Omega) = -X(\Omega)$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x)$.
On montre que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$, pour le faire on fixe $t \in \mathbb{R}$, par le théorème du transfert

$$\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{-tx}\mathbb{P}(X = x)$$

l'application $x \longmapsto -x$ est une bijection de $X(\Omega)$ vers lui même, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) &= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx}\mathbb{P}(X = -x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx}\mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\varphi_X(-t) = -\varphi_X(t)$ et pour $t = 0$, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X)$, cela entraîne $\mathbb{E}(X) = 0$, c'est-à-dire $\varphi_X(0) = 0$. On conclut alors φ_X est impaire.

$\Rightarrow$) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi_{-X}(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)\right) = -\varphi_X(-t) = \varphi_X(t)$$

D'autre part $\varphi_X(0) = 0$, car φ_X est impaire, donc $\varphi_{-X}(0) = \mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X) = 0$, ceci montre que $\varphi_X = \varphi_{-X}$. D'après la question **??**, X et $-X$ ont la même loi

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^*$. On a $\mathbb{E}(S_n) = nm$ et $\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2$, d'autre part les variables $t\frac{X_1 - m}{\sqrt{n}\sigma}, \cdots, t\frac{X_n - m}{\sqrt{n}\sigma}$ sont finies et mutullement indépendantes, et par un calcul

direct

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n^*}(t) &= \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{tS_n^*}\right)\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n} t\frac{X_i-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{t\frac{X_i-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) \qquad \text{Par indépendance}\\
&= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\frac{-}{\sqrt{n}\sigma}}\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{t\frac{-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right) + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right)\\
&= \frac{-nm}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\\
&= \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \qquad \text{car } \forall i,\ \varphi_{X_i} = \varphi_X
\end{aligned}$$

(b) Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ_X donne

$$\begin{aligned}
\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= \varphi_X(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\varphi_X'(0) + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \mathbb{E}(X) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\frac{\mathbb{V}(X)}{2} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= m + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\frac{\sigma^2}{2} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n^*}(t) &= \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\
&= \frac{t}{2} + \circ(1)
\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_{S_n^*}(t) = \dfrac{t}{2}$.

Partie II: Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

1. (a) On peut écrire $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, avec $\lambda \in [0,1]$, et par convexité de la fonction exponentielle

$$e^{bx} = e^{\lambda ax + (1-\lambda)cx} \leqslant \lambda e^{ax} + (1-\lambda)e^{cx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$$

(b)
- $1 \in I_X$, car $\mathbb{E}\left(e^{0X}\right) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x) = 1$
- Soit $a, c \in I_X$ tel que $a \leqslant c$. Montrons que $[a,c] \subset I_X$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$, donc $e^{bX} \leqslant e^{aX} + e^{cX}$, et comme les deux variables positives admettent des espérances, alors la variable positive e^{bX} admet une espérance, donc $b \in I_X$, ainsi l'inclusion $[a,c] \subset I_X$. On déduit I_X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, la variable e^{tX} admet une espérance si, et seulement, si la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{tn}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ converge. Or la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!}$ converge de somme $e^{\lambda e^t}$, donc M_Y est définie sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Y\left(t\right) = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, l'application $u_n : t \in]-\alpha, \alpha[\longmapsto P(X = x_n)e^{tx_n}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et ,
$$u_n^{(k)}(t) = P(X = x_n)x_n^k e^{tx_n}$$
les inégalités $e^{tx_n} \leqslant e^{|t||x_n|} \leqslant e^{\alpha|x_n|}$ donnent
$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \leqslant P(X = x_n)\left|x_n\right|^k e^{\alpha|x_n|}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^k e^{(\alpha-\rho)x}$ est continue, positive, strictement décroissante sur $\left[\frac{k}{\rho-\alpha}, +\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[0, \frac{k}{\rho-\alpha}\right]$ il existe $M_k = \psi_k\left(\frac{k}{\rho-\alpha}\right) > 0$,

t	0		$\frac{k}{\rho-\alpha}$		$+\infty$
$\psi_k'(t)$		$+$	0	$-$	
ψ_k	0	$\nearrow$	M_k	$\searrow$	0

Pour $k = 0$, la fonction $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{(\alpha-\rho)x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $M_0 = 1$.
Bref pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n^{(k)}(t)| \leqslant P(X = x_n)\left|x_n\right|^k e^{\alpha|x_n|} = P(X = x_n)\psi_k\left(|x_n|\right)e^{\rho|x_n|} \leqslant M_k P(X = x_n)|e^{\rho|x_n|}.$$

(c)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$
- Soit $k \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{\rho|x_n|} \leqslant e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}$ et $-\rho, \rho \in]-\alpha, , [\alpha$, donc la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(X = x_n)|e^{\rho|x_n|}$ converge et, par suite, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment $[-a, a]$ inclus dans $]-\alpha, \alpha[$

Donc, par le théorème de dérivation terme à terme, $M_X = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$, et
$$\forall t \in \left]-\alpha, \alpha\right[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k e^{tx_n}\mathbb{P}\left(X = x_n\right)$$
En particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n^k \mathbb{P}\left(X = x_n\right)$ est absolument convergente, donc X admet un moment d'ordre k. Ainsi
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$$

4. Dans ce cas $M_Y : t \longmapsto e^{\lambda e^t - \lambda}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} M_Y'(t) &= \lambda e^t e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y'(0) &= \lambda \\ M_Y''(t) &= \lambda^2 e^t e^{\lambda e^t - \lambda} + \lambda e^{2t} e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y''(0) &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$
Alors $\mathbb{E}\left(Y\right) = M_Y'(0) = \lambda$ et par la formule de Huygens kœnig
$$\mathbb{V}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2 = M_Y''(0) - M_Y'(0) = \lambda$$

Partie III: Cas des variables aléatoires à densité

1. Soit $t \in I_X \cap I_Y$, les deux variables e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes, car X et Y le sont. Comme e^{tX} et e^{tY} admettent des espérances alors, par indépendance, $e^{t(X+Y)} = e^{tX}e^{tY}$ admet une espérance et

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}e^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right) = M_X(t)M_Y(t)$$

Remarque : *Les deux applications ne sont pas forcément égales mais elles coïncident sur* $I_X \cap I_Y$

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, la série à termes positifs $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{|st|^k}{k!}$ converge de somme $e^{s|t|}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|st|^k}{k!} \leqslant e^{s|t|}$ ou encore $|t^k| \leqslant \frac{k!}{s^k}e^{s|t|}$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |t^k| \leqslant \frac{k!}{s^k}e^{s|t|} \leqslant \frac{k!}{s^k}\left(e^{st} + e^{-st}\right)$$

   Soit

$$|X|^k \leqslant \frac{k!}{s^k}\left(e^{sX} + e^{-sX}\right)$$

   Les deux variables positives e^{sX} et e^{-sX} admettent des espérances car $-s, s \in]a, b[$, alors par comparaison, la variable $|X|^k$ admet une espérance.

   Remarque : *On a aussi l'inégalité* $\mathbb{E}\left(|X|^k\right) \leqslant \frac{k!}{s^k}\left(M_X(s) + M_X(-s)\right)$ *qui sera utilisée à la question suivante*

   (c) Soit $-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = +\infty$ tels que pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$ la fonction f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$. On va appliquer le théorème de convergence dominée sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.
   Fixons $t \in]-s, s[$

   - Pour tout $k \in \mathbb{K}$, l'application $f_k : x \longmapsto \frac{t^k x^k}{k!}f(x)$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et intégrable car $\mathbb{E}\left(|X|^k\right)$ est finie
   - La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur $]a_i, a_{i+1}[$ de somme $x \longmapsto e^{tx}f(x)$ qui est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$
   - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_k(x| \,\mathrm{d}x &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left|\frac{t^k x^k}{k!}f(x)\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{|t|^k}{k!}\mathbb{E}\left(|X|^k\right) \\
&\leqslant \frac{|t|^k}{k!}\frac{k!}{s^k}\left(M_X(s) + M_X(-s)\right) \\
&\leqslant \left(M_X(s) + M_X(-s)\right)\frac{|t|^k}{s^k}
\end{aligned}$$

     et la série géométrique du terme général $\frac{|t|^k}{s^k}$ converge. Bref la série du terme général $\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_k(x| \,\mathrm{d}x$ converge

Donc d'après le théorème de la convergence dominée, on peut intégrer terme à terme, soit

$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k x^k}{k!} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ceci vrai pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, alors on conclut par la relation de Chasles que, pour tout $t \in]-s, s[$, $M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!}$

Remarque : *On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur $\mathbb{R}$, car f n'est pas forcément continue par morceaux sur $\mathbb{R}$*

(d) M_X est développable en série entier en 0, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-s, s[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\mathbb{E}\left(X^k\right)}{k!}$$