Correction proposée par El Amdaoui
École Royale de l'Air-Marrakech.Maroc

Problème 1

Partie I: Théorème de Weierstrass

1. (a) On fait appel à la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1$$

(b) Il est clair que pour tout $x \in [0,1]$, $B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \geqslant 0$. D'autre part, d'après la question précédente, $B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1$

2. • On utilise la formule $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} kB_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} nC_{n-1}^{k} X^{k+1} (1-X)^{n-1-k} \\
&= nX\left(X+(1-X)\right)^{n-1} = nX
\end{aligned}$$

• Pour $n=1$, on a bien $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = 0$. Si $n \geqslant 2$, on utilise la formule $k(-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)B_{n,k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)C_{n-2}^{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)C_{n-2}^{k} X^{k+2} (1-X)^{n-2-k} \\
&= n(n-1)X^2\left(X+(1-X)\right)^{n-2} = n(n-1)X^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = n(n-1)X^2$$

Cette égalité est valable aussi pour $n=1$

• Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$ est la somme de deux précédents

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} = n(n-1)X^2 + nX$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$. On distingue trois cas

• Si $k=0$, on a $B_{n,0} = (1-X)^n$, donc $B'_{n,0} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$

- Si $k=n$, on a $B_{n,n}=X^n$, donc $B'_{n,n}=nX^{n-1}=nB_{n-1,n-1}$
- Si $k\neq 0$ et $k\neq n$, on a

$$\begin{aligned}B'_{n,k} &= kC_n^kX^{k-1}(1-X)^{n-k}-(n-k)C_n^kX^k(1-X)^{n-k-1}\\ &= nC_{n-1}^{k-1}X^{k-1}(1-X)^{n-k}-nC_{n-1}^{k}X^k(1-X)^{n-k-1}\\ &= n\left(B_{n-1,k-1}-B_{n-1,k}\right)\end{aligned}$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}(P_n(f))' &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B'_{n,k}\\
&= f(0)\,B'_{n,0}+f(1)\,B'_{n,n}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B'_{n,k}\\
&= -nf(0)B_{n-1,0}+nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)(B_{n-1,k-1}-B_{n-1,k})\\
&= -nf(0)B_{n-1,0}+nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k-1}-n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k}\\
&= -nf(0)B_{n-1,0}+nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right)B_{n-1,k}-n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k}\\
&= nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right)B_{n-1,k}-n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k}-nf(0)B_{n-1,0}\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)B_{n-1,k}-n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k}\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}\end{aligned}$$

Ainsi l'égalité souhaitée, pour tout $x\in[0,1]$, $(P_n(f))'(x)=n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$

(c) Si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\in[0,1]$ et $\dfrac{k}{n}<\dfrac{k+1}{n}$, alors par croissance de f, on a $f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant 0$. En outre, d'après la question **??**, pour tout $x\in[0,1]$, on a $B_{n-1,k}(x)\geqslant 0$ et, par suite, $(P_n(f))'(x)\geqslant 0$. Ceci montre que $P_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$

4. On fixe $\varepsilon>0$

(a) Soit $x\in[0,1]$, par un calcul direct

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-2x\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)B_{n,k}(x)\\
&= x^2\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)-2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}(x)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}(x)\\
&= x^2-2\frac{x}{n}.nx+\frac{1}{n^2}\left(n(n-1)x^2+nx\right)\\
&= \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

(b) Par absurde supposons que pour tout $\alpha>0$, il existe $x,y\in[0,1]$ tel que $|x-y|\leqslant\alpha$ et $|f(x)-f(y)|>\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n,y_n\in[0,1]$ tels que $|x_n-y_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ et $|f(x_n)-f(y_n)|>\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$[0,1]$ est compact donc $[0,1]\times[0,1]$ est compact d'où on peut extraire de (x_n,y_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)},y_{\varphi(n)})$ d'où les deux suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent. Posons $x=\lim x_{\varphi(n)}$ et $y=\lim y_{\varphi(n)}$. On a $x_n-y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x_{\varphi(n)}-y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $x=y$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc $f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)}) \to f(x)-f(y)=0$. Absurde, car $\left|f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)})\right| > \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

(c) i. Par construction de A, pour tout $k\in A$, on a : $\left|f(x)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x) = \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. Remarquons que si $k\in B$, alors $\left|x-\dfrac{k}{n}\right|>\alpha$, on a alors $1\leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x) &\leqslant 2M\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k\in B}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n}\\
&\leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x\mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $\dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{4}$.

(d) Soit $x\in[0,1]$, remarquons d'abord que $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(x)B_{n,k}(x)$, $[\![0,n]\!]=A\cup B$ et $A\cap B=\emptyset$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
|P_n(f)(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{n}f(x)B_{n,k}(x)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)B_{n,k}(x)\right|\\
&= \left|\sum_{k\in A}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)B_{n,k}(x)+\sum_{k\in B}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)B_{n,k}(x)\right|\\
&\leqslant \sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)+\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

(e) Fixons $\varepsilon>0$ et soit α le réel strictment positif donné par l'uniforme continuité. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n\geqslant n_0,\quad \frac{M}{2n\alpha^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour $n\geqslant n_0$:

$$\forall x\in[0,1], |f(x)-P_n(f)(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $(P_n(f))_{n\geqslant 0}$ vers f.

5. L'application $f : x \in [0,1] \longmapsto g(a+(b-a)x)$ est continue, par composition, sur $[0,1]$. Posons $Q_n(g)(x) = P_n(f)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$, pour $x \in [a,b]$, où $(P_n(f))$ la suite de polynômes de Bernstein associée à f converge uniformément vers f sur $[0,1]$. $(Q_n(g))$ est encore une suite de fonctions polynomiales, et pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|Q_n(g)(x) - g(x)| = \left|P_n(f)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| \leqslant \| P_n(f) - f \|_\infty^{[0,1]}$$

Donc $(Q_n(g))$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Partie II: Une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$

1. (a) $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$, donc $\mathbb{E}(S_n) = nx$ et $\mathbb{V}(S_n) = nx(1-x)$, en conséquence, l'espérance et la variance de X_n sont respectivement $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(X_n) = x$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{x(1-x)}{n}$

   (b) Soit $\delta > 0$, l'inégalité de Bienaymé Chebychev nous donne

$$\mathbb{P}(|X_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

2. (a) On a $X_n(\Omega) = \left\{\dfrac{k}{n} \quad , \quad k \in [\![0,n]\!]\right\}$ et $P\left(X_n = \dfrac{k}{n}\right) = P(S_n = k)$.
   $f(X_n)$ est bient définier car f est continue sur $[0,1]$ et X à valeurs dans $[0,1]$. $X_n(\Omega)$ est fini ; on peut appliquer le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} C_n(f)(x) &= \mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k \in S_n(\Omega)} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

   ce qui montre que $x \longmapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale

   (b) i. Par construction de β, on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| \leqslant \beta$ on a : $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right)\right| &\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta}\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ii. Remarquons que $[|X_n - x| > \beta] \subset [|X_n - x| \geqslant \beta]$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathbb{P}\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right| &\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\\
&\leqslant 2M\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta}\mathbb{P}\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\\
&\leqslant 2M\mathbb{P}\left(|X_n-x|>\beta\right)\\
&\leqslant 2M\frac{\mathbb{V}\left(X_n\right)}{\beta^2}\\
&\leqslant \frac{2M}{\beta^2}\frac{x(1-x)}{n}\\
&\leqslant \frac{M}{2n\beta^2}
\end{aligned}$$

où la quatrième inégalité vient de l'inégalité de Bienyamé Tchebychev, vu que $\mathbb{E}\left(X_n\right) = x$ et la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\beta > 0$ obtenu du théorème de Heine. Soit $x \in [0,1]$, alors par l'inégalité triangulaire et les inégalités des deux dernières questions, on a :

$$|C_n(f)(x) - f(x)| \quad \leqslant \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\beta^2}$$

Avec $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{M}{2n\beta^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in [0,1], |C_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $\left(C_n(f)\right)_{n\geqslant 1}$ vers f.

Partie III: Application

1. (a) Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\int_a^b P\left(x\right) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

D'après théorème de Weierstrass, il existe une suite $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, en écrivant

$$\left|f(x)^2 - f(x)P_n(x)\right| = |f(x)\left(f(x) - P_n(x)\right)| \leqslant \| f \|_\infty^{[a,b]} \| f - P_n \|_\infty^{[a,b]}$$

et il en résulte que la suite $\left(fP_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$. D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$$

La fonction f^2 étant continue positive sur le segment $[a,b]$ d'intégrale nulle, donc $f^2 = 0$, ainsi la nullité de f

(b) • **Convergence :** Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \longmapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc I_n est impropre en $+\infty$, mais $x^n e^{-(1-i)x} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc I_n converge.

• **Calcul :** Les deux fonctions $x \longmapsto x^{n+1}$ et $x \longmapsto e^{-(1-i)x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telles que $x^{n+1}e^{-(1-i)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} x^{n+1}\left(\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \left[x^{n+1}\left(\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{1-i}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n+1}{1-i} I_n
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^n} I_0$, avec $I_0 = \dfrac{1}{1-i}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{2}^{n+1}} e^{\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, remarquons que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$, en conséquence

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3} e^{-x} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

L'application $t \longmapsto \sqrt[4]{t}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ vers lui même, donc par intégration par changement de variable, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3} e^{-x} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} t^n e^{-\sqrt[4]{t}} \sin\left(\sqrt[4]{t}\right)\mathrm{d}t$$

Posons alors $\phi : x \in [0,+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{4} e^{-\sqrt[4]{x}} \sin(\sqrt[4]{x})$, une telle fonction répond aux contraintes demandées

2. D'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ qui converge uniformément vers g sur I.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : x \longmapsto Q_n(x) - \displaystyle\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. La suite de polynômes (P_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. D'autre part pour tout $x \in I$, on a

$$|P_n(x) - g(x)| \leqslant |Q_n(x) - g(x)| + \left|\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \| Q_n - g \|_\infty + \left|\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Or $Q_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} g$, donc $\| Q_n - g \|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\displaystyle\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} g$

3. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, en particulier φ' est continue sur I, d'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ qui converge uniformément vers φ' sur I. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : x \longmapsto \varphi(a) + \displaystyle\int_a^x Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(a) + \displaystyle\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et on a :

$$|P_n(x) - \varphi(x)| = \left|\int_a^x Q_n(t) - \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a) \| Q_n - \varphi' \|_\infty$$

Ceci montre $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \varphi$, et comme $P_n' = Q_n$, alors on a aussi $P_n' \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \varphi'$

4. On peut se ramener au cas $I = [0, 1]$, la construction des polynômes de Bernstein donnée auparavant $P_n = \sum_{k=0}^{n} \psi\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$, montre que $\forall t \in [0, 1]$, $P_n(t) \geqslant 0$, car ψ est positive sur I, et $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \psi$