

**Concours National Commun - Session 2014**  
**Corrigé de l'épreuve de mathématiques II**  
**Filière MP**

*Sous-espaces de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  formés de matrices diagonalisables*

Corrigé par M.TARQI<sup>1</sup>

---

1. M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

**Problème**  
**Sous-espaces de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  formés de matrices**  
**diagonalisables**  
**Première partie**  
**Caractérisation des homothéties en dimension 2**  
**Application au commutant**

## 1.1

1.1.1 Soit  $x$  un vecteur non nul. Puisque  $x$  et  $f(x)$  sont colinéaires, alors il existe  $\lambda_x$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ .

1.1.2 Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $E$ , montrons que  $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ . On a

$$f(e_1 + e_2) = \lambda_{e_1} e_1 + \lambda_{e_2} e_2 = \lambda_{e_1 + e_2} (e_1 + e_2),$$

donc  $(\lambda_{e_1} - \lambda_{e_1 + e_2})e_1 + (\lambda_{e_2} - \lambda_{e_1 + e_2})e_2 = 0$ , donc  $\lambda_{e_1} - \lambda_{e_1 + e_2} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1 + e_2} = 0$ , d'où  $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ .

1.1.3 Soit  $x = \alpha e_1 + \beta e_2 \in E$ , on a :

$$f(x) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = \alpha \lambda_{e_1} e_1 + \beta \lambda_{e_2} e_2 = \lambda(\alpha e_1 + \beta e_2) = \lambda x,$$

donc  $f$  est une homothétie de rapport  $\lambda$ .

## 1.2

1.2.1 Il est clair que  $Id_E \in \mathcal{C}(f)$  et que si  $g, h \in \mathcal{C}(f)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\lambda g + h \in \mathcal{C}(f)$ , donc  $\mathcal{C}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

1.2.2 Si  $f$  est une homothétie, alors  $\forall g \in \mathcal{L}(E)$ ,  $fg = gf$ , donc  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ .

## 1.3

1.3.1 Puisque  $f$  n'est pas une homothétie, alors il existe  $e \in E$ , tel que  $(e, f(e))$  soit libre, c'est à dire une base de  $E$ .

1.3.2 Les scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées du vecteur  $g(e)$  dans la base  $(e, f(e))$ . D'autre part, si  $g \in \mathcal{C}(f)$ , on a :

$$g(f(e)) = f(g(e)) = f(\alpha e + \beta f(e)) = \alpha f(e) + \beta f(f(e)) = (\alpha Id_E + \beta f)(f(e)).$$

Donc les deux endomorphismes  $g$  et  $\alpha Id_E + \beta f$  coïncident dans la base  $(e, f(e))$ , donc ils sont égaux :  $g = \alpha Id_E + \beta f$ .

1.3.3 D'après ce qui précède,  $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(Id_E, f)$ , donc  $(Id_E, f)$  est une famille génératrice de  $\mathcal{C}(f)$ , de plus elle est libre, en effet, si  $\alpha Id_E + \beta f = 0$ , alors en particulier  $\beta e + \beta f(e) = 0$ , donc  $\alpha = \beta = 0$ , car  $(e, f(e))$  est une base de  $E$ .

En conclusion,  $\mathcal{C}(f)$  est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

#### 1.4 Traduction matricielle

1.4.1 Si  $A$  est une matrice scalaire, on a  $AM = MA$  pour tout  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , donc  $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

1.4.2 Si  $A$  n'est pas une matrice scalaire, comme dans 1.3,  $\{I_2, A\}$  forme une base de  $\mathcal{C}(A)$ , donc  $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$  et  $\dim \mathcal{C}(A) = 2$ .

## Deuxième partie

### Diagonalisation simultanée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

2.1 Si  $a \neq c$   $A$  est diagonalisable ( le polynôme caractéristique scindé à racines simples ). Si  $a = c$  et  $b \neq 0$   $A$  n'est pas diagonalisable (  $A$  n'est pas une matrice scalaire ). En conclusion,  $A$  est diagonalisable si et seulement si,  $a \neq c$  ou bien  $a = c$  et  $b = 0$ .

2.2 D'après la question 2.1, la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2.3 La matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si, il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PDP^{-1}$ , donc  $A + \lambda I_2 = P(D + \lambda I_2)P^{-1}$ , ce qui montre que  $A + \lambda I_2$  est semblable à une matrice diagonale, donc  $A + \lambda I_2$  est diagonalisable.

Inversement, supposons qu'il existe  $D$  diagonale et  $P$  inversible tels que  $A + \lambda I_2 = PDP^{-1}$ , donc  $A = P(D - \lambda I_2)P^{-1}$ , donc  $A$  est diagonalisable.

#### 2.4

2.4.1 Si  $A$  est une matrice scalaire, toute base de vecteurs propres de  $B$  est une base de vecteurs propres de  $A$ . Donc  $A$  et  $B$  sont simultanément diagonalisables.

Supposons maintenant  $A$  est semblable à une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$  avec  $\lambda \neq \mu$ . Posons  $E_\lambda = \text{Vect}(e_1)$  et  $E_\mu = \text{Vect}\{e_2\}$  les sous-espaces propres associés à  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement ( sont des droites vectorielles ). Comme  $AB = BA$ ,  $E_\lambda$  et  $E_\mu$  sont stables par  $B$ , ceci montre que  $e_1$  et  $e_2$  sont des vecteurs propres de  $B$ . Donc  $B$  est diagonalisable dans la même base de vecteurs propres de  $A$ , c'est à dire  $A$  et  $B$  sont simultanément diagonalisables.

2.4.2 Posons  $PAP^{-1} = D_1$  et  $PBP^{-1} = D_2$  où  $D_1$  et  $D_2$  sont des matrices diagonales. Donc pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $P(A + \lambda B)P^{-1} = D_1 + \lambda D_2$ , donc  $A + \lambda B$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

#### 2.5 Familles de matrices diagonalisables

2.5.1 Si toutes les matrices sont scalaires n'importe quelle base convient, sinon on choisit une matrice  $A_{i_0}$  qui n'est pas scalaire de valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$ , et posons  $E_\lambda = \text{Vect}(e_1)$  et  $E_\mu = \text{Vect}\{e_2\}$ . On décompose  $\mathbb{K}^2$  comme somme directe des sous-espaces propres :

$$\mathbb{K}^2 = E_\lambda \oplus E_\mu$$

Les droites vectorielles  $E_\lambda$  et  $E_\mu$  sont stables par les matrices  $(A_i)_{i \in I}$ , donc  $\{e_1, e_2\}$  est une base de vecteurs propre pour chaque  $A_i$ . On note  $P$  la matrice dont les colonnes sont données par les composantes de  $e_1$  et  $e_2$ , alors,  $\forall i \in I$ ,  $PA_iP^{-1}$  est une matrice diagonale.

2.5.2 On remarque que les matrices  $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont diagonalisables puisque  $A_i^2 - I_2 = 0$  ( $A_i$  est racine d'un polynôme scindé à racines simples) et puisque les  $A_i$  commutent, alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $PA_iP^{-1}$  soit diagonale. Posons alors

$$D_i = PA_iP^{-1} = \text{diag}(\lambda_i, \mu_i).$$

Les valeurs possibles de  $A_i$  sont 1 ou  $-1$ , donc il y a au plus 4 valeurs possibles pour chaque  $D_i$ , ce qui donne 4 valeurs propres possibles pour les  $A_i$ . Ainsi on a montré que  $m \leq 4$ .

## 2.6

2.6.1  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , la matrice  $J + \lambda K$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , car elle est symétrique réelle.

2.2.2 On a  $JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}$  et  $KJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , donc les matrices  $J$  et  $K$  ne commutent pas.

## 2.7

2.7.1 Puisque  $B$  est diagonalisable et n'est pas scalaire, alors  $B$  admet deux valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  distinctes. Donc il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $B = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$ .

2.7.2 On a  $P^{-1}(A + \lambda(B - \alpha I_2))P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d + \lambda\gamma \end{pmatrix}$ . Comme le polynôme caractéristique est invariant par changement de base, alors  $\chi_\lambda(X) = X^2 - (a + d + \lambda\gamma)X + a(d + \lambda\gamma) - bc$ , et par conséquent  $\delta_\lambda = (a + d + \lambda\gamma)^2 - 4a(a + \lambda\gamma) - 4bc$ ; c'est un polynôme de degré 2 et  $\lambda$ .

2.7.3 Soit  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $\delta_{\lambda_0} = 0$ , donc le polynôme caractéristique de  $A + \lambda_0(B - \alpha I_2)$  admet une racine double. D'autre part, on sait que  $A + \lambda_0(B - \alpha I_2)$  est diagonalisable (car  $A + \lambda_0 B$  est diagonalisable) donc  $A + \lambda_0(B - \alpha I_2)$  est une matrice scalaire.

2.7.4 Posons  $A + \lambda_0(B - \alpha I_2) = \alpha_0 I_2$ , donc la matrice  $A$  est un polynôme en  $B$ , donc elle commute avec  $B$ .

# Troisième partie

## Étude des sous-espaces de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

### 3.1

- 3.1.1 Soit  $B \in \mathcal{F}$  non scalaire, donc  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, A + \lambda B$  est diagonalisable, car  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel, et par suite, d'après la question 2.7,  $AB = BA$ , donc  $B \in \mathcal{C}(A)$ .  
À partir de l'inclusion  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(A)$ , on a  $\mathcal{F} = \mathcal{C}(A)$  ou bien  $\mathcal{F} = \text{Vect}(A)$ . Dans le premier cas  $\dim \mathcal{F} = 2$  ( la question 1.4), dans le second cas  $\dim \mathcal{F} = 1$ .
- 3.1.2 Si  $\mathcal{F}$  contient  $I_2$ , alors  $\mathcal{F}$  soit une droite vectorielle ou bien un plan vectoriel, de la forme  $\mathcal{C}(A)$ , ou un hyperplan de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
 $\dim \mathcal{F} \leq 3$ , car  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  contient des matrices non diagonalisables ( la question 2.1 ).
- 3.2 Le sous-espace vectoriel engendré par la matrice  $I_2$ , formé par des matrices diagonalisables ( matrices scalaires ), est de dimension 1.  
Le sous-espace vectoriel engendré par les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est de dimension 2.
- 3.3 L'application  $M \mapsto PMP^{-1}$  est un automorphisme d'espace vectoriel de  $\mathcal{M}$ , donc  $P\mathcal{M}P^{-1}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et  $\dim(P\mathcal{M}P^{-1}) = \dim \mathcal{M}$ .
- 3.4 On a  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ . Donc  $\dim \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = 3 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - 1$ , donc  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Comme toutes les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, alors  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  est formé des matrices diagonalisables.
- 3.5 D'après la question 3.3,  $R\mathcal{S}_2(\mathbb{R})R^{-1}$  est un sous-espace vectoriel de même dimension que  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ , donc c'est un hyperplan, de plus si  $A$  est diagonalisable, alors il est de même de la matrice  $RAR^{-1}$ , donc  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  est formé des matrices diagonalisables.

3.6

- 3.6.1 Si  $I_2$  n'était pas un élément de  $\mathcal{V}$ , l'ensemble  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}I_2 \oplus \mathcal{V}$  serait constitué de matrices diagonalisables, ce qui est faux ( il existe des matrices non diagonalisables ). Donc  $I_2$  est un élément de  $\mathcal{V}$ .
- 3.6.2 Il existe une matrice  $P$  inversible et  $\alpha, \beta$  des complexes distincts tels que  $A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$ .

Mais on a

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = \beta I_2 + (\alpha - \beta)Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Donc

$$Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} (A - \beta I_2) \in \mathcal{V}.$$

3.6.3 On a successivement

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = (a-d)A_1 + dI_2 + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$ .Supposons qu'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $\alpha = \beta = 0$ , et par suite  $b = c = 0$  ce qui est faux. Ainsi  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{W} \setminus \text{Vect}(I_2, A_1)$ .

Comme il s'agit d'une matrice diagonalisable et non colinéaire à  $I_2$ , alors son polynôme caractéristique  $X^2 - bc$  doit être scindé à racines simples, ce que donne la condition  $bc > 0$ .

3.6.4 On a  $\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{W}$ , il suffit donc de prendre  $w = \sqrt{\frac{b}{c}}$ .

La famille  $\{I_2, A_1, B_1\}$  est libre (vérification immédiate), et comme  $\mathscr{W} \subset \text{Vect}(I_2, A_1, B_1)$  et de dimension 3, alors  $\mathscr{W} = \text{Vect}(I_2, A_1, B_1)$ .

3.6.5 Les valeurs propres de  $B_1$  sont  $w$  et  $-w$ , des vecteurs propres associés sont respectivement  $(w, 1)$  et  $(-w, 1)$ . Notons  $P = \begin{pmatrix} w & -w \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Soit  $M = \alpha I_2 + \beta A_1 + \gamma B_2$  un élément quelconque de  $\mathscr{W}$ , alors on a :

$$M = P \left( \alpha I_2 + \beta P^{-1} A_1 P + \gamma \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix} \right) P^{-1}.$$

On a  $P^{-1} A_1 P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\alpha I_2 + \beta P^{-1} A_1 P + \gamma \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ , ce qui montre que  $\mathscr{W}$  est conjugué à  $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ , par transitivité il est de même de  $\mathscr{F}$  et  $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ .

3.7 Soit  $\mathscr{V}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ , formé de matrices diagonalisables, donc c'est un sous-espace de dimension  $\leq 3$ , car il existe des matrices non diagonalisables.

- Le cas de la dimension 3 est traité dans la question 3.6.
- En outre, le résultat est clair pour les espaces vectoriels de dimension  $\leq 1$ .
- Maintenant, si  $\mathscr{V} = \text{Vect}(M, N)$  est un plan vectoriel de matrices diagonalisables, alors deux cas sont possibles :
  - Si  $I_2 \in \mathscr{V}$ , alors  $\mathscr{V} = \text{Vect}(I_2, A)$ , où  $A$  est une matrice non scalaire de  $\mathscr{V}$ . Introduisons  $P$  la matrice de passage de la base canonique vers une base de diagonalisation de  $A$ . Alors  $P^{-1} \mathscr{V} P$  est un sous-espace vectoriel de matrices symétriques, ce qui établit le résultat dans ce premier cas.
  - Si  $I_2 \notin \mathscr{V}$  alors c'est un sous-espace vectoriel de l'hyperplan de matrices diagonalisables  $\text{Vect}(I_2, A, B)$  qui est conjugué à  $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ . Ainsi  $\mathscr{V}$  est conjugué à un sous-espace vectoriel de  $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ .

3.8 Soit  $\mathscr{V}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ , formés des matrices orthogonalement diagonalisables.

- Si  $\dim \mathscr{V} = 3$ , on trouve  $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ .
- Si  $\dim \mathscr{V} = 1$ , on trouve les droites vectoriels engendrées par des matrices symétriques ( toute matrice orthogonalement diagonalisable est symétrique ).
- Si  $\dim \mathscr{V} = 2$ , on trouve les plans vectoriels de  $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ .

•••••