Indications :

$\sum,\prod$ *et binôme de Newton*

Exercice1 :

$a)\ (1+2)^n = 3^n$;

$b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^k.5^{-1} = 5^{-1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^k = 5^{-1}6^n$

$c)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{1-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{-k}.3 = 3\sum_{k=0}^{n} C_n^k (3^{-1})^k = 3.(1+3^{-1})^n \ldots$

$d)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k-1}.2^{2k} = (-1).\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k.(2^2)^k = -\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-4)^k = -(1-4)^n \ldots$

Exercice2 :

Juste utiliser le binôme de Newton et le triangle de Pascal…

Exercice3 :

$$a)\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ix})^k\right) = \mathrm{Re}\left((1+e^{ix})^n\right)$$

Pour le complexe $(1+e^{ix})^n$, utiliser la règle de l'angle moitié…

$b)\ kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ (simple à vérifier)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} kC_n^k &= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (\textit{décalage d'indice}) \\
&= n.2^{n-1}
\end{aligned}$$

2ème méthode :

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a aussi : $f(x) = (1+x)^n$.

$$\Rightarrow f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1} \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n.2^{n-1}$$

$c)$ *On a* $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ (*simple à vérifier*)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k}_{2^{n+1}-1} \ (décalage\ d'indice)$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

2ème méthode :

Posons $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \ , \forall x \in \mathbb{R}$. $Soit \ \ f(x) = (1+x)^n$

$$\Rightarrow \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \right) dx = \int_0^t \left((1+x)^n \right) dx \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \overbrace{\left(\int_0^t x^k dx \right)}^{=\frac{t^{k+1}}{k+1}} = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^t \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{t^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1} \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$Et \ \ t=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Exercice4 :

$$a) \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \ldots$$

$$b) \ 1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + \ldots + n.1 = \sum_{k=1}^{n} k.(n+1-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(k.(n+1) - k^2 \right)$$

$$= (n+1). \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= \ldots$$

Exercice5 :

$$a) \sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} k + 0 \right) = n+1 \ (l'\text{int}ervalle\ commun\ \ est\ 1..n)$$

$$b) \sum_{k=2}^{n+2} k - \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{k=2}^{n+2} k - \sum_{k=0}^{n} k \ \ (et\ on\ continue\ comme\ \ plus-haut)$$

$$c) \sum_{k=0}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-2)(k-1) = \sum_{k=0}^{n} k(k+1) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (k-1)k}_{(décalage\ \ d'indice)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\left(k(k+1)-(k-1)k\right)}_{=2k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}2k$$
$$=2.\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)$$

Exercice6 :

1) $Si\ \ x=1:\sum_{k=1}^{n}kx^k=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Sinon :

$Soit\ \ x\neq 1:$

$$Notons\ \ f(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k,\ \ donc\ \ f(x)=x.\frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\left(x.\frac{1-x^n}{1-x}\right)'=\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)'$$

$$\Rightarrow x.f'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^k=x.\frac{\left(1-(n+1)x^n\right)\left(1-x\right)+\left(x-x^{n+1}\right)}{\left(1-x\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}kx^k=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{\left(1-x\right)^2}\quad (sauf\ \ erreurs\ de\ calculs\ !)$$

NB : il y a une autre piste ;voir Ex 13.

2) $C_n=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\cos(kx)}_{\mathrm{Re}(e^{ikx})}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(e^{ikx})=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right).$

$$Notons\ \ Z=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}.\ On\ a\ ainsi:\begin{cases}C_n=\mathrm{Re}(Z)\\ S_n=\mathrm{Im}(Z)\end{cases}$$

$$On\ a:\ Z=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k.$$

On distinguera deux cas : $si\ \ e^{ix}=1\ \ et\ \ si\ \ e^{ix}\neq 1.$

Cas 1 : $si\ \ e^{ix}=1\ \ (ie\ \ si\ \ x\in 2\pi\mathbb{Z}\ )$

$$\Rightarrow Z=\sum_{k=0}^{n}1=n+1.\ On\ aura\ ainsi:\begin{cases}C_n=n+1\\ S_n=0\end{cases}$$

Cas 2 : $si\ \ e^{ix}\neq 1\ \ (ie\ \ si\ \ x\notin 2\pi\mathbb{Z}\ )$

$$\Rightarrow Z=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}.\frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.e^{i\frac{nx}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right) \\ S_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right) \end{cases}$$

3) <u>Idée</u> :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{k\cos(kx)}_{\mathrm{Re}(ke^{ikx})} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(ke^{ikx}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} ke^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} k\left(e^{ix}\right)^k\right) = \mathrm{Re}(Z)$$

où $Z = \sum_{k=0}^{n} k\left(e^{ix}\right)^k$.

Et de même $s_n = \mathrm{Im}(Z)$.

On simplifie Z via 1) *ou aussi le résultat de Ex*13.

<u>Exercice7 :</u>

$$b^n - a^n = (b-a).\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \Rightarrow \frac{b^n - a^n}{b-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

$$\forall k = 0 \ldots n-1;\ a^k \le b^k \ ,\ donc\ \underbrace{a^k b^{n-1-k} \le b^k b^{n-1-k} = b^{n-1}}_{(A)}$$

$$\forall k = 0 \ldots n-1;\ a^{n-1-k} \le b^{n-1-k} \ ,\ donc\ \underbrace{a^k b^{n-1-k} \ge a^k a^{n-1-k} = a^{n-1}}_{(B)}$$

$$(A)\ et\ (B) \Rightarrow\ \forall k = 0 \ldots n-1;\ a^{n-1} \le a^k b^{n-1-k} \le b^{n-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1}}_{=na^{-1}} \le \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1}}_{=nb^{-1}}$$

<u>Exercice8 :</u>

On applique Ex 6. 1°) pour x=-1.

<u>Exercice9 :</u>

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k}\right) + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \succ 0 \end{aligned}$$

<u>Exercice10 :</u>

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : OK

Hérédité :

Supposons $\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$ *et* $M.que \sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n+2)!$.

On a : $\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \leq (n+1)! + (n+1)! = \underbrace{2}_{\leq n+2}.(n+1)! \leq (n+2)!$

Exercice11 :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k.$$

$Cas1: si\ e^{i\theta} = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

$Cas2: si\ e^{i\theta} \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \ldots = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.e^{\frac{in\theta}{2}}$$

$$NB: e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

Exercice12 :

$$\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (q^2)^k = \ldots$$

Rappel : $\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & si\ \ z \neq 1 \\ n+1 & si\ \ z = 1 \end{cases}$

Exercice13 :

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= \sum_{k=0}^{n} kq^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} kq^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)q^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k \,(décalage\ d'indice) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} kq^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k\right) - \sum_{k=1}^{n} q^k \\ &= (n+1)q^{n+1} - q.\frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \frac{(n+2)q^{n+1} - (n+1)q^{n+2} - q}{1-q} \end{aligned}$$

Valeur de S_n :

$$qS_n - S_n = \frac{(n+2)q^{n+1} - (n+1)q^{n+2} - q}{1-q} \Rightarrow S_n = -\frac{(n+2)q^{n+1} - (n+1)q^{n+2} - q}{(1-q)^2}$$

Exercice14 :

a) Supposons $q=0[\pi]$ (ie $x \in \pi\mathbb{Z}$)

$Soit\ m \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ x = m\pi.$

$$On\ a : \cos\left(2^k x\right) = \cos\left(2^k m\pi\right) = \begin{cases} 1 \quad si\ k \geq 1 \\ (-1)^m \quad si\ k = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = (-1)^m = (-1)^{\frac{x}{\pi}} \ (car \quad x = m\pi)$$

b) Supposons $q \neq 0\,[\pi]$ (ie $x \in \pi\mathbb{Z}$)

Rappel : $\sin a.\cos a = \frac{1}{2}\sin(2a)$. On a :

$$\sin x.P(x) = \underbrace{\sin(2^0 x).\cos(2^0 x)}_{=\frac{1}{2}\sin(2^1 x)}.\cos(2^1 x)...\cos(2^n x)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2^1 x)\cos(2^1 x)}_{=\frac{1}{2}\sin(2^2 x)}\cos(2^2 x)...\cos(2^n x)$$

$$= \frac{1}{2^2}\underbrace{\sin(2^2 x)\cos(2^2 x)}_{=\frac{1}{2}\sin(2^3 x)}\cos(2^3 x)...\cos(2^n x)$$

$$= \frac{1}{2^3}\sin(2^3 x)\cos(2^3 x)\cos(2^4 x)...\cos(2^n x)$$

....

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\underbrace{\sin(2^{n-1} x)\cos(2^{n-1} x)}_{=\frac{1}{2}\sin(2^n x)}\cos(2^n x)$$

$$= \frac{1}{2^n}\sin(2^n x)\cos(2^n x)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1} x)$$

Enfin pour P(x), on a :

$$\sin x.P(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1} x) \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2^{n+1}}.\frac{\sin(2^{n+1} x)}{\sin x}$$

Exercice15 : a) $a = 1 \Rightarrow P = \prod_{k=0}^{n}(1 + a^{2^k}) = \prod_{k=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$.

b) Supposons que $a \neq 1$. On a :

$$(1-a)P = (1-a^{2^0})(1+a^{2^0})(1+a^{2^1})...(1+a^{2^n})$$

$$= (1-a^{2^1})(1+a^{2^1})(1+a^{2^2})...(1+a^{2^n}) \qquad \left(On\ a\ (1-a^{2^k})(1+a^{2^k}) = (1-a^{2^{k+1}})\right)$$

$$= (1-a^{2^2})(1+a^{2^2})(1+a^{2^3})...(1+a^{2^n})$$

....

$$= (1-a^{2^{n-1}})(1+a^{2^{n-1}})(1+a^{2^n})$$
$$= (1-a^{2^n})(1+a^{2^n})$$
$$= (1-a^{2^{n+1}})$$

Valeur de P :

$$(1-a)P = (1-a^{2^{n+1}}) \Rightarrow P = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

Exercice16 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \mathbb{Z}$.

Si $p \succ n$ *ou* $p \prec 0$ *, la convention* $C_n^p = 0$ *garantit l'égalité voulue.*

Sinon , on a : $pC_n^p = p.\frac{n!}{p!(n-p)!} = n.\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = nC_{n-1}^{p-1}$.

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{n} pC_n^p = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p = \sum_{p=1}^{n} nC_{n-1}^{p-1} = n\sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} = n\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^{p} \ (\textit{décalage d'indices})$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{n} pC_n^p = n2^{n-1}$$

Exercice17 :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \left(1+x\right)^n \geq 1+nx$.

Initialisation : ok

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, *Supposons* $\left(1+x\right)^n \geq 1+nx$ *et m.que* $\left(1+x\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$:

$$\left(1+x\right)^n \geq 1+nx \Rightarrow \left(1+x\right)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
$$= 1+(n+1)x + \underbrace{n.x^2}_{\geq 0}$$
$$\Rightarrow \left(1+x\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

b) Remontrons cette inégalité via l'égalité de Bernoulli :

Rappel :(l'égalité de Bernoulli)

$$a^n - b^n = (a-b).\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

En particulier : $a^n - 1 = (a-1).\sum_{k=0}^{n-1} a^k$

On a alors :

$$\left(1+x\right)^n - 1 = ((1+x)-1).\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(1+x)^k}_{\geq 1} \geq x.\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 1}_{=n} = nx$$

$$\Rightarrow \left(1+x\right)^n - 1 \geq nx$$
$$\Rightarrow \left(1+x\right)^n \geq 1+nx$$

c) Démonstration via le binôme de Newton :

$$\left(1+x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \underbrace{C_n^0 x^0}_{=1} + \underbrace{C_n^1 x^1}_{=nx} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} C_n^k x^k}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \left(1+x\right)^n \geq 1+nx$$

2) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$, *on a* : $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Faisons par récurrence sur $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation :

Pour $n=1$, $\prod_{i=1}^{1}(1+a_i) = 1+a_1$ *et* $1+\sum_{i=1}^{1} a_i = 1+a_1$ *d'où* $\prod_{i=1}^{1}(1+a_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{1} a_i$

Hérédité :

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right)}_{\geq 1+\sum_{i=1}^{n} a_i}.(1+a_{n+1}) \geq (1+\sum_{i=1}^{n} a_i)(1+a_{n+1}) = 1+\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}}_{=\sum_{i=1}^{n+1} a_i} + \underbrace{a_{n+1}.\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\geq 0} \geq 1+\sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

3) En quoi ceci généralise-t-il le résultat de la question 1) ?

Notons $a_i = x$ *pour tout* $i = 1...n$.

Alors $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(1+x)}_{(1+x)^n} \geq 1+\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x}_{=nx}$

Fin