Fonct. usuelles
Correction

Ex2 $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{\ln a+\ln b}{2} \iff \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \ln(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})$

$\iff \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$\iff \frac{a+b-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{2} \geqslant 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$

ce qui est vrai

Ex 3 via l'étude des variations des fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et

$x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

Ex 5 1) $(e^{x^2})^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x}} = (e^{x^2})^{\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln x}{x}} = e^{x^2\cdot\frac{\ln x}{x^2}} = e^{\ln x} = x$

2°) $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\ln x\right) = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$

3°) $\log_x\left(\log_x(x^{x^y})\right) = \log_x(x^y) = y$ $\qquad [\log_x(x^B) = B]$

Ex 6 1°) $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$

($\ln x \to -\infty$, $x \to 0^+$)

2°) $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$; $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

3°) $x^{\sqrt{x}} = e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}$; $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \Rightarrow \lim_{0^+} x^{\sqrt{x}} = 0$

4°) $x^{(x^x)} = e^{x^x\cdot\ln x}$

$x^x\cdot\ln x = e^{x\ln x}\cdot\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ $\quad$ (car $x\ln x \to 0$, $\ln x \to -\infty$)

$\Rightarrow \lim_{0^+} x^{x^x} = 0$

5°) $(x^x)^x = x^{x^2} = e^{x^2\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{0^+}(x^x)^x = 1$

6°) $\dfrac{(x^x)^x}{x^{x^x}} = \dfrac{x^{x^2}}{x^{x^x}} = x^{x^2-x^x} = e^{(x^2-x^x)\ln x}$.

$\forall x>2,\ (x^2-x^x)\ln x = x^x.\ln x\,(x^{2-x}-1)$

$= e^{x\ln x}.\ln x.\left(e^{(2-x)\ln x}-1\right)$

et on a : $\begin{cases} (2-x)\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} e^{(2-x)\ln x} = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} e^{x\ln x} = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty}(x^2-x^x)\ln x = -\infty$; Enfin ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{x^x}} = 0$

7°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{3^x} = \lim\limits_{+\infty} x.\left(\dfrac{e}{3}\right)^x = \lim\limits_{+\infty} x\, e^{\ln\left(\frac{e}{3}\right).x} = 0$

car $\lim\limits_{+\infty} e^{\ln\left(\frac{e}{3}\right).x} = 0$ $\left(\ln\left(\frac{e}{3}\right)<0\right)$ et l'exponentielle l'emporte sur la puissance au voisinage de $+\infty$.

8°) De même, $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{xe^x}{3^x} = \lim\limits_{-\infty} \underset{-\infty}{x}\, e^{\overbrace{\ln\left(\frac{e}{3}\right).x}^{+\infty}} = -\infty$

EXERCICE 7

A) 1°) $2^{x^3} = 3^{x^2} \iff e^{x^3.\ln 2} = e^{x^2.\ln 3} \iff x^3\ln 2 = x^2\ln 3$

$\iff x^2(\ln 2.x - \ln 3) = 0 \iff \boxed{x=0 \text{ ou } x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}}$

$\boxed{S = \left\{0, \dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right\}}$

2°) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$; Cette équation est définie d'abord sur $]0,+\infty[$

Soit alors $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x} \iff e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln\sqrt{x}} \iff \sqrt{x}.\ln x = \frac{x.\ln x}{2}$$

$$\iff \sqrt{x}.\ln x - \frac{x.\ln x}{2} = 0 \iff \sqrt{x}.\ln x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0$$

$$\iff \ln x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0 \quad (\text{car } \sqrt{x} \neq 0)$$

$$\iff \left(\ln x = 0 \text{ ou } 1 = \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \iff (x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2)$$

$$\boxed{\text{C/c : } S = \{1, 4\}}$$

3°) N'est pas très rapide.
Posons $f(x) = x^x$, On a : $x^x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff f(x) = f(\frac{1}{2})$.

Il s'agit de déterminer les réels $x > 0$ tels que $\boxed{f(x) = f(\frac{1}{2})}$.

$\rightarrow$ f dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = (\ln x + 1) \cdot \underbrace{x^x}_{>0}$$

$\Rightarrow sg(f'(x)) = sg(\ln x + 1)$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On a $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{e}, +\infty[$ et f strictement croissant sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$

Alors l'équation $\left(f(x) = f(\frac{1}{2})\right)$ possède sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ une unique solution qui est $\frac{1}{2}$.

Sur $]0, \frac{1}{e}]$; On a $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2})$

D'où, et puisque f est strict. décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$, alors $\frac{1}{4}$ est l'unique solution sur $]0, \frac{1}{e}]$.

Enfin, L'équation $\left(x^x = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}\right)$ possède comme solutions :

$$\left(\frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{4}\right)$$

4°) $e^x + \frac{e}{e^x} = 1+e \iff e^{2x} + e = (1+e)e^x$

$\iff (e^x)^2 - (1+e)e^x + e = 0$

On résout l'équation : $y^2 - (1+e)y + e = 0$ ....

5) $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \iff 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}}$

$\iff 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(1+3) \iff 3 \cdot 2^{2x-1} = 2^2 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$

$\iff 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \iff e^{(2x-3)\ln 2} = e^{(x-\frac{3}{2})\ln 3}$

$\iff (2x-3)\ln 2 = \ln 3(x-\frac{3}{2}) \iff$ .... (équat. 1er degré d'une seule inconnue : x)

B)
1°) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2 \cdot 2^x = 10y \end{cases} \iff \begin{cases} 8^x = 2 \cdot 2^x \\ 2^x = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{3x} = 2^{x+1} \\ 2^x = 5y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x = x+1 \\ 2^x = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/2 \\ 2^x = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/2 \\ y = \frac{2^{1/2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}$

$S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$

2°) $\begin{cases} e^x \cdot e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x+2y} = a \\ x \cdot (2y) = 1 \end{cases}$ (Σ)

Cas 1 : $a \leq 0$; $S = \emptyset$ (car $e^{x+2y} > 0$)

Cas 2 : $a > 0$,

$(\Sigma) \iff \begin{cases} x + 2y = \ln a \\ x \cdot (2y) = 1 \end{cases}$

$\iff$ (x et $2y$ sont solutions de l'équation :
(E) $t^2 - (\ln a)t + 1 = 0$)

etc.