<u>Dimension finie :</u>
<u>Solution</u>

<u>Exercice 1 :</u>

1) (f; g; h) est libre :

$On \ \ a \ : \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin x + \beta \cos x + \delta = 0$

$$(x = 0 \ \ et \ \ x = \pi) \Rightarrow \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = \delta = 0$$

L'égalité devient : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin x = 0$.

$et \ \ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = 0$.

----

2) (f; g; h; i) est libre, en effet :

$On \ \ a \ : \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin x + \beta \cos x + \lambda x \sin x + \delta x \cos x = 0.$

$x = 0 \Rightarrow \beta = 0.$

$x = \pi \Rightarrow \delta = 0$

L'égalité devient : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin x + \lambda x \sin x = 0.$

Penser à simplifier par sin(x) quand $x \notin \pi\mathbb{Z}$ …

----

3) (f; g; h) est liée : vient de la fameuse égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

----

4) (sin; cos; exp) est libre :

$On \ \ a \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin x + \beta \cos x + \delta e^x = 0$.

<u>Piste1</u> : via les développements limités (DL).

En écrivant les DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions sin, cos et exp, l'égalité ci-dessus devient :

$$(\beta + \delta) + (\alpha + \delta)x + (-\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})x^2 + o(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$$

<u>Piste 2 :</u>

$On \ \ a \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin x + \beta \cos x + \delta e^x = 0$.

La fonction $x \mapsto \alpha \sin x + \beta \cos x$ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto \delta e^x$ aussi.

$\Rightarrow \delta = 0$.

L'égalité devient : $On \ \ a \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin x + \beta \cos x = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ (classique)

Exercice 2 **:**

1) La famille F a 3 éléments et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, alors pour montrer qu'elle est une base il suffit de montrer qu'elle est libre.

$$\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \delta Q_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + \delta = 0 \\ \quad -\beta - \delta = 0 \\ \alpha + 3\beta - \delta = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est non nul, donc $\alpha = \beta = \delta = 0$.

La famille est libre, donc une base.

----

2) notons (x,y,z) le triplet des coordonnées de X dans la base F.

Alors $X = xQ_1 + yQ_2 + zQ_3$.

Après identifications des coefficients, on obtient le système: $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ \quad -y - z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$.

En le résolvant (via la méthode de Gauss par exemple) on obtient :

X=3 , y= -1, z=0.

Exercice 15

1) Là encore, puisque le cardinal de la famille est égale à la dimension de l'espace, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Faisons une démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

→ pour n=0 :

$d^0(P_0) = 0 \Rightarrow P_0 \neq 0$

$\Rightarrow (P_0)$ *famille libre*

→ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition vraie pour n et montrons-la pour n+1 .

Supposons que : $\forall k = 0..n+1,\ d^0(P_k) = k$.

Montrons que $(P_0,...,P_{n+1})$ est libre.

On a : $\alpha_0 P_0 + ... + \alpha_{n+1}P_{n+1} = 0$.

Considérons le coefficient en X^{n+1} ; il est égal à $\alpha_{n+1}.a_{n+1}$, où a_{n+1} est le coefficient dominant de P_{n+1}. Et il est évidemment nul.

$\Rightarrow \alpha_{n+1} = 0\ (car\ \ a_{n+1} \neq 0)$

L'égalité ci-dessus devient : $\alpha_0 P_0 + ... + \alpha_n P_n = 0$.

Et l'hypothèse de récurrence permet de conclure que : $\forall k = 0..n,\ \alpha_k = 0$.

D'où $\forall k = 0..n+1,\ \alpha_k = 0$

$\Rightarrow$ $(P_0,...,P_{n+1})$ est libre .

2) a) Pour $(Q_0,...,Q_n)$ est une base de $K_n[X]$, ça vient de 1).

b) Soit $P \in E$.

<u>Existence</u> :

$$(Q_0,...,Q_n) \text{ est une base de } E = K_n[X] \Rightarrow \exists a_0,...,a_n \in K \ / \ P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(X)$$

$$\Rightarrow P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left((X+a)^k + X^k \right) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+a)^k + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\Rightarrow P(X) = Q(X+a) + Q(X) \ ; où \ Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Unicité :

Soient Q et Q' deux polynômes e E tels que $\begin{cases} P(X)=Q(X+a)+Q(X) \\ P(X)=Q'(X+a)+Q'(X) \end{cases}$.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\left((X+a)^k+X^k\right)}_{Q_k(X)} = \sum_{k=0}^{n} a'_k \underbrace{\left((X+a)^k+X^k\right)}_{Q_k(X)}$, *avec* $Q(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $Q'(X)=\sum_{k=0}^{n} a'_k X^k$

$\Rightarrow \forall k=0..n,\ a_k = a'_k$ (car $(Q_0,...,Q_n)$ est libre)

$\Rightarrow Q=Q'$

D'où l'unicité.

Exercice 3 :

1)

$On\ a\ \ \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\sin x)^k = 0$

$\Rightarrow \forall t \in [0,1]\ ,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = 0$

$\Rightarrow\ P=0,\ avec\ \ P(X)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k\ car\ \ le\ \ polynome\ \ P\ \ possède\ \ une\ \ \inf inité\ \ de\ \ racine, donc\ nul$

$\Rightarrow \forall k=0..n\ ,\ \alpha_k = 0$

2) Même idée en écrivant : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(e^x\right)^k = P(e^x);\ où\ P(X)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$

Exercice 4 :

$(\Rightarrow)$

a) n=2rg(f) ; en effet :
théorème du rang $\Rightarrow \underbrace{\dim(E)}_{=n} = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{=\dim(\mathrm{Im}(f))} + rg(f) = 2rg(f)$

b) $f^2=0$; en effet :
$\forall x \in E,\ f^2(x) = f(f(x))$
$or\ \ f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \ker(f),\ \ alors\ \ \ f(f(x))=0$
$\Rightarrow\ f^2(x)=0$

$(\Leftarrow)$ Pour montrer que Im(f)=ker(f), il suffit de montrer que :

$\begin{cases} \mathrm{Im}(f) \subset \ker(f) \\ \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) \end{cases}$

a) $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, en effet :
$y \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in E\ /\ y = f(x)$
$\Rightarrow f(y) = \underbrace{f^2(x)}_{=0}$
$\Rightarrow y \in \ker(f)$

b) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f))$, en effet :
On a n=2rg(f) et n=dim(ker(f)+rg(f) grâce au thm du rang.
$\Rightarrow rg(f) = \dim(\ker(f))$
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f))$

Exercice 5:

Raisonnons par l'absurde , et supposons que $F \cap G = \{0\}$.

$\Rightarrow \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

$\Rightarrow \dim(F \oplus G) = 6 \succ \dim(\mathbb{R}^5)$

Ce qui est absurde, d'où $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 6:

Ressemble à l'exercice 8.

Exercice 7 :

1) Simple.
2) a) φ est linéaire, en effet :

Soient u et v $\in E$, *on a* $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ *et* $\varphi(v) = (v_0, v_1)$.

$$\text{et on a} : \varphi(\alpha u + \beta v) = ((\alpha u + \beta v)_0, (\alpha u + \beta v)_1) = (\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1)$$
$$= \alpha(u_0, v_0) + \beta(u_1, v_1) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$$

b) φ est bijective, en effet :

b)1) φ est injective, en effet :

$\varphi(u) = 0 \Rightarrow (u_0, u_1) = (0,0)$

$\Rightarrow u_0 = 0$ *et* $u_1 = 0$.

Montrons que u=0, càd que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

Faites par récurrence double sur n $\in \mathbb{N}$; c'est simple !

b)2) φ est surjective, en effet :

Soit $(\alpha, \beta) \in K^2$. Montrons qu'il existe $u = (u_n)_n \in E$ telle que $\varphi(u) = (\alpha, \beta)$.

La suite récurrente $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha\ ,\ u_1 = \beta \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases}$ convient.

Conclusion : φ est bijective.

φ *isomorphisme* $\Rightarrow \dim(E) = \dim(K^2) = 2$; càd E est un plan vectoriel.

Exercice 12 :

2)

Posons dim (E) = n.

→ $\ker(f^2) = \ker(f) \Rightarrow \operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$, en effet :

$$\ker(f^2) = \ker(f) \Rightarrow \dim\left(\ker(f^2)\right) = \dim\left(\ker(f)\right)$$
$$\Rightarrow n - \dim\left(\operatorname{Im}(f^2)\right) = n - \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right) \text{ (thm du rang)}$$
$$\Rightarrow \dim\left(\operatorname{Im}(f^2)\right) = \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right)$$

D'autre part, on vérifie rapidement que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.

D'où $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$.

→ $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \Rightarrow E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, en effet :
Comme plus-haut, on vérifie que $\ker(f^2) = \ker(f)$; via thm du rang et du fait que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
Il suffit de montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ pour montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$; en effet :
Grâce au thm du rang, on obtient $\dim(E) = \dim(\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f))$.
Montrons alors que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$:
Soit $x \in E$, *on a* :

$$x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists t \in E \,/\, x = f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = f^2(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in \ker(f^2) = \ker(f)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(t)}_{=x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

D'où $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.