Ex 1 : Clef : $\boxed{\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2} \; ; \; \min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}}$

Démo clef : $\boxed{\begin{cases} \max(a,b) + \min(a,b) = a+b \\ \max(a,b) - \min(a,b) = |a-b| \end{cases}}$

Sol : $\max(u_n, v_n) = \dfrac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2} \longrightarrow \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \max(\alpha,\beta)$

Idem pour $\min(u_n, v_n)$

Ex 2 : 1°) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{(\ln n)^n} = \underbrace{\dfrac{1}{n+1} \cdot \ln(n+1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \cdot \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$

D'autre part, on a :

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)} ;$$

et on a $n \ln\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = n \ln\left(\dfrac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)$

$$= n \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) \sim n \cdot \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$$

Car $\lim\limits_{n} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 0$

or $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, alors $n \ln(1+\frac{1}{n}) \sim 1$

D'où $n \ln\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) \sim \dfrac{1}{\ln n}$, et donc $\boxed{\lim\limits_{n} n \ln\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = 0}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$; enfin $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2°) On a $\lim_{n} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0$, alors en utilisant la définition pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \underbrace{\frac{U_{n+1}}{U_n} - 0}_{\geq 0} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}}$$

—o—

3°) On a : $\forall n \geq N$, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2} \leq 1$

$$\Rightarrow \forall n \geq N, \; U_{n+1} \leq U_n$$

D'où $(U_n)_{n \geq N}$ est décroissante

—o—

4°) $(U_n)_{n \geq N}$ décroissante et minorée par 0 (car positive)
donc elle converge, notons l sa limite.

On a : $(\forall n \geq N, U_n > 0)$, alors $\lim U_n = l \geq 0$

$l = 0$; en effet : Raisonnons par l'absurde, et supposons que $l > 0$,

alors $\lim_{n} U_n = \lim_{n} U_{n+1} = l$

$$\Rightarrow \lim_{n} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$$

or $\forall n \geq N$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1/2$, alors $\overbrace{\lim_{n} \frac{U_{n+1}}{U_n}}^{=1} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 \leq 1/2$; ce qui est absurde

D'où $l = 0$

5°) BONUS :

Démonstration directe que : « $\lim_n U_n = 0$ »

On a : $\forall n \geq N, 0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \forall p \geq N, \underbrace{\prod_{n=N}^{p-1} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)}_{\text{produit téléscopique}} \leq \underbrace{\prod_{n=N}^{p-1} \left(\frac{1}{2}\right)}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1-N+1}}$$

$$\Rightarrow \forall p \geq N, \frac{U_p}{U_N} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall p \geq N, U_p \leq \underbrace{\left(U_N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-N}\right)}_{\text{Une Constante par rapport à } p} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^p}$$

« En faisant tendre p vers $+\infty$ »

or $\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p = 0$, alors $\boxed{\lim_{p \to +\infty} U_p = 0}$

FIN

Ex3 : 1°) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ (évident)

1°) Soit $n \geq 2$, $U_n = \frac{1}{n-1} e^{-U_{n-1}} \leq \frac{1}{n-1}$ car $-U_{n-1} \leq 0$

2°) $\left(\forall n \geq 2, 0 < U_n \leq \frac{1}{n-1}\right) \xRightarrow{\text{Gendarmes}} \lim_n U_n = 0$

3°) On a $\lim_n U_n = 0$ alors $\lim_n e^{-U_{n-1}} = 1$, càd $\boxed{e^{-U_{n-1}} \sim 1}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n-1} e^{-U_{n-1}}}_{= U_n} \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n} \text{ ; D'où } \boxed{U_n \sim \frac{1}{n}}$$

Ex32 :

1°) Soit $k \geq 2$.

$\forall t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,dt}_{=\frac{1}{k}} \leq \underbrace{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt}_{=\ln k - \ln(k-1)} \leq \underbrace{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1}\,dt}_{=\frac{1}{k-1}}$$

d'où : $\boxed{\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1) \leq \frac{1}{k-1}}$

2°) (1°) $\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \left(\ln k - \ln(k-1)\right)}_{\text{téléscopie}} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}_{=H_n - 1} \leq \ln n \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}_{=H_n - \frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq 1 + \ln n}$$

3°) a°/ $H_n \sim \ln n$; en effet

2°/ $\Rightarrow \forall n \geq 2$; $1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$

Gendarmes $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$; càd $\boxed{H_n \sim \ln n}$

b°/ $\left(H_n \sim \ln n \text{ et } \lim_{n} \ln n = +\infty\right) \Rightarrow \lim_{n} H_n = +\infty$

Rappel : (U_n) et (V_n) adjacentes si et ssi l'une croissante, l'autre décroissante, ...

4°) $U_{n+1} - U_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0$

d'après 1°/.

D'où $\boxed{(U_n)_n \text{ décroissante}}$

$(V_n)_n$ croissante ; en effet :

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - \frac{1}{n+1} - U_n + \frac{1}{n} = \underbrace{U_{n+1} - U_n}^{\left(= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n\right)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n \geq 0$$

car $\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n$ (selon 1°/ encore)

$\lim_n (V_n - U_n) = \lim_n -\frac{1}{n} = 0$; Enfin, (U_n) et (V_n) adjacentes

$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$; en effet :

On a que $\lim_n U_n = \gamma$, càd $\lim_{n \to +\infty} (U_n - \gamma) = 0$

ce qui veut encore dire que : $\boxed{U_n - \gamma = o(1)}$

$$\Rightarrow \overbrace{H_n - \ln n}^{= U_n} - \gamma = o(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$$

5°) Soit $n \geq 1$: i) $0 \leq \varepsilon_n$; en effet :

On a $(U_n) \downarrow$ et $\lim_n U_n = \gamma$ alors $\gamma \leq U_n$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{U_n - \gamma}_{= \varepsilon_n}$$

ii) On a de même que $V_n \leq \gamma$, puisque $(V_n) \uparrow$ et $V_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma$

$\Rightarrow U_n - \frac{1}{n} \leq \gamma$, et donc $\underbrace{U_n - \gamma}_{= \varepsilon_n} \leq \frac{1}{n}$

Ex32 (suite) :

6°) Rappel : Le réel a est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près ssi $|a-\gamma| \leq 10^{-2}$

On a : $\forall n \geq 1$, $|\varepsilon_n| = \varepsilon_n = |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$

pour avoir $|\varepsilon_N| \leq 10^{-2}$, il suffit d'avoir $\frac{1}{N} \leq 10^{-2}$

càd $N \geq 10^2$.

Ainsi, on a $|\varepsilon_{100}| \leq 10^{-2}$ càd $|u_{100} - \gamma| \leq 10^{-2}$

D'où u_{100} est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Calcul de u_{100} : On a $u_{100} = H_{100} - \ln(100)$

$H_{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$; pour le calculer, on a l'algorithme :

```
C ← 0
pour k ← 1 à 100 faire
    C ← C + 1/k
fin pour
C ← C − ln(100)
```

Avec Maple :

```
C := 0 :
for k from 1 to 100 do
    C := C + 1/k :
od :
C := C - ln(100) :
evalf(C) ;
```

On trouve : $C \simeq$

La suite :

A venir