Nombres réels
Solution

Exercice 1 :
D'après la caractérisation de la borne sup, on a :

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists a \in A \ / \ a \succ \alpha - \varepsilon$$

Prendre $\varepsilon = \alpha$ et c'est términé.

Exercice 2 :
Pour conjecturer les valeurs de sup(A) et inf(A), je conseille de faire un schéma sur la droite réelles où placer les premiers éléments correspondant aux premiers entiers afin de voir la répartition des éléments de A.

1) $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On verra ainsi que $1 + \frac{1}{1} = \max(A)$ *et* $\inf(A) = 1$.

→ $1 + \frac{1}{1} \in A$. et $\forall n \geq 1, 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{1}$.

donc c'est le plus grand élément de A, et enfin sup(A)=max(A)=2

→ inf(A)=1 , en effet :

On utilise la caractérisation de la borne inférieure de A , on a :

i) $\forall n \geq 1, 1 \leq 1 + \frac{1}{n}$.

ii) Soit $\varepsilon \succ 0$. Montrons l'existence de $n \geq 1$ tel que $1 + \frac{1}{n} \prec 1 + \varepsilon$.

Càd que $n \succ \frac{1}{\varepsilon}$.

Et $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ *convient* .

----

2) $B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On conjecture de même que : inf(B) = -1 et sup(B) = max(B) = $1 + \frac{1}{2}$

i) <u>Pour sup(B) = max(B) = $1 + \frac{1}{2}$:</u>

→ on a $1 + \frac{1}{2} \in B$ (*pour* $n = 2$)

→ on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2}$.

On vérifie par exemple que cette inégalité est vraie pour les entiers pairs et impairs.

→ enfin max(B) = $1 + \frac{1}{2}$(=sup(B)).

ii) Pour : inf(B) = -1 :

→ $(-1)^n + \frac{1}{n} \geq -1$: est simple à voir

→ Soit $\varepsilon \succ 0$. Montrons l'existence de $n \geq 1$ tel que $(-1)^n + \frac{1}{n} \prec -1+\varepsilon$.

une idée consiste à viser un entier impaire ;

càd qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \prec -1+\varepsilon$.

Et on a :

$$(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \prec -1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} \prec \varepsilon \Leftrightarrow 2n+1 \succ \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \succ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$

Et $n = E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right)+1$ *convient*.

----

2) $C = \left\{1+\frac{(-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$, *Idem*

Exercice 3 :

1) sup(A) $\leq$ sup(B) , en effet :
   soit a$\in$A, on a que a$\in$B
   donc a$\leq$sup(B)
   Ainsi : $\forall a \in A,\ a \leq \sup(B)$
   D'où sup(B) est un majorant de A
   et donc sup(A) $\leq$ sup(B) (car sup(A) est le plus petit de tous les majorants de A)
2) inf(B) $\leq$inf(A)
   soit a$\in$A, on a que a$\in$B
   donc inf(B)$\leq$a
   Ainsi : $\forall a \in A,\ \inf(\mathrm{B}) \leq \mathrm{a}$
   D'où inf(B) est un minorant de A
   et donc inf(B) $\leq$inf(A)

Exercice 4 :

1) sup(A) existe car est une partie non vide de $\mathbb{R}$, qui est majorée par n'importe quel élément de B.
De même pour l'existence de inf(B).

----

2) sup(A) $\leq$ inf(B), en effet :
Soit a$\in$A, on a : $\forall b \in B, a \leq b$
D'où a est un minorant de B, et par suite a$\leq$inf(B)
Ainsi : $\forall a \in A, a \leq \inf(B)$
Càd que inf(B) est un majorant de A.
Donc sup(A) $\leq$inf(B).

Exercice 5 :

Clés à retenir concernant *max(a,b)* :

1) $\max(a,b)=\begin{cases} a \ si \ a \geq b \\ b \ si \ b \geq a \end{cases}$; 3) $\max(a,b) \leq M \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq M \\ b \leq M \end{cases}$
2) $\begin{cases} a \leq \max(a,b) \\ b \leq \max(a,b) \end{cases}$

<u>Solution</u> :

1) sup($A\cup B$) existe, en effet :

i) $A\cup B$ est bien non vide puisque contient A qui est non vide.

ii) $A\cup B$ est majoré, en effet :

Soit $a \in A\cup B$, alors $\left(a \in A \ ou \ a \in B\right)$.

Donc $\left(a \leq \sup(A) \ ou \ a \leq \sup(B)\right)$

et on sait que $\begin{cases} \sup(A) \leq \max\left(\sup(A),\sup(B)\right) \\ \sup(B) \leq \max\left(\sup(A),\sup(B)\right) \end{cases}$, alors $a \leq \max\left(\sup(A),\sup(B)\right)$.

On a donc montré que : $\forall a \in A\cup B, a \leq \max\left(\sup(A),\sup(B)\right)$

D'où $\underbrace{\max\left(\sup(A),\sup(B)\right)}_{appelons\ ce\ réel\ \alpha}$ est un majorant de $A\cup B$.

Enfin sup($A\cup B$) existe .

2) $\sup(A\cup B)=\alpha$ *, en effet :*

α est un majorant de $A\cup B$ d'après 1).

Il reste à vérifier qu'il est le plus petit des majorants de A.

Pour cela , soit M un majorant de $A\cup B$, il s'agit de montrer que $\alpha \leq M$.

Càd (voir la clé 3)) : $\begin{cases} \sup(A) \leq M \\ \sup(B) \leq M \end{cases}$.

Montrons que $\sup(A) \leq M$ (l'autre inégalité se traitera de même) :

On a $\left(\forall x \in A, x \leq M\right)$, car M majore $A\cup B$ et que $A\cup B$ contient x .

D'où M est un majorant de A.

Alors $\sup(A) \leq M$.

Exercice 6 :

1) A+B est majoré par sup(A)+sup(B) : c'est clair
2) A+B est majoré par sup(A)+sup(B) donc pour montrer que sup(A+B)=sup(A)+sup(B), et en utilisant la caractérisation de la borne supérieure, on montre que :

$$\forall \varepsilon \succ 0 \ , \ \exists (a,b) \in A\times B \ / \sup(A)+\sup(B)-\varepsilon \prec a+b$$

Soit $\varepsilon \succ 0$:

En vertu de la caractérisation de la borne supérieure pour $\frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$$\begin{cases} \exists a \in A / \sup(A)-\frac{\varepsilon}{2} \prec a \\ \exists b \in B / \sup(B)-\frac{\varepsilon}{2} \prec b \end{cases}$$

D'où après sommation : $\exists (a,b) \in A\times B \ / \sup(A)+\sup(B)-\varepsilon \prec a+b$.

Exercice 7 :

$\boxed{\textbf{Clé : } Si\ m \le x\ avec\, m \in \mathbb{Z},\ alors\ m \le E(x)}$

Soient x et y deux réels tels que $x \le y$, *montrons que* $E(x) \le E(y)$:

$On\ a\ E(x) \le x\ \ donc\, E(x) \le y$

$Or\ E(x) \in \mathbb{Z}\ ,\ alors\ E(x) \le E(y).$

Exercice 8 :

1) *Montrons que* $E(x)+E(y) \le E(x+y)$:

$$On\ a\ \begin{cases} E(x) \le x \\ E(y) \le y \end{cases}\ alors\ \underbrace{E(x)+E(y)}_{\in\mathbb{Z}} \le x+y$$

$$D'où\ E(x)+E(y) \le E(x+y)$$

----

2) *Montrons que* $E(x+y) \le E(x)+E(y)$:

$\boxed{\textbf{Clé : } Si\ x \prec m\ avec\, m \in \mathbb{Z},\ alors\ E(x) \le m-1}$

$$On\ a\ \begin{cases} x \prec E(x)+1 \\ y \prec E(y)+1 \end{cases}\ alors\ x+y \prec \underbrace{E(x)+E(y)+2}_{\in\mathbb{Z}}$$

$$D'où\ E(x+y) \le E(x)+E(y)+1$$

Exercice 9 :

1) $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) \le E(x)$, en effet :

$$E(nx) \le nx \Rightarrow \frac{E(nx)}{n} \le x$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \le E(x)\ (E\ est\ croissante)$$

2) $E(x) \le E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)$, en effet :

$$E(x) \le x \Rightarrow nE(x) \le nx$$

$$\Rightarrow nE(x) \le E\left(nx\right)$$

$$\Rightarrow E(x) \le \frac{E(nx)}{n}$$

$$\Rightarrow E(x) \le E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$$

Exercice 10 :

1) i) $\underbrace{E(nx)}_{notons\ ça\ m} \le nx \prec E(nx)+1 \Rightarrow \dfrac{m}{n} \le x \prec \dfrac{m+1}{n}$

$$et\ m = nq+r\ \ \Rightarrow \frac{m}{n} = q+\frac{r}{n}$$

d'autre part, on a $0 \le k \prec n-r$ *,donc* $0 \le k \le n-r-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{n} \le x \prec \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \\ 0 \le \frac{k}{n} \le 1 - \frac{r}{n} - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} \le x + \frac{k}{n} \prec \underbrace{\frac{m-r}{n}}_{=q \ car \ m=nq+r} + 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{q + \frac{r}{n}}_{q\le} \le x + \frac{k}{n} \prec q+1$$

$$\Rightarrow q \le x + \frac{k}{n} \prec q+1$$

$$\Rightarrow E\left(x + \frac{k}{n} \right) = q$$

----

ii) $m \le nx \prec m+1 \Rightarrow \frac{m}{n} \le x \prec \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$

$et \ n-r \le k \le n-1 \Rightarrow 1 - \frac{r}{n} \le \frac{k}{n} \le 1 - \frac{1}{n}$

$Par \ sommation \ on \ a: \ \underbrace{\frac{m-r}{n} + 1}_{=q+1} \le x + \frac{k}{n} \prec \underbrace{\frac{m}{n} + 1}_{=q+\frac{r}{n}+1}$

$$\Rightarrow q+1 \le x + \frac{k}{n} \prec q + \underbrace{\frac{r}{n}}_{\prec 1 \ car \ r \prec n} + 1 \prec q+2$$

$$\Rightarrow q+1 \le x + \frac{k}{n} \prec q+2$$

$$\Rightarrow E\left(x + \frac{k}{n} \right) = q+1$$

----

2)

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-r-1} \underbrace{E\left(x + \frac{k}{n} \right)}_{=q} + \sum_{k=n-r}^{n-1} \underbrace{E\left(x + \frac{k}{n} \right)}_{q+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r-1} q + \sum_{k=n-r}^{n-1} (q+1)$$

$$= q(n-r-1-0+1) + (q+1)(n-1-(n-r)+1)$$

$$= q(n-r) + (q+1).r = nq + r = m = E(nx)$$

<u>Exercice 11 :</u>

1) i) On a f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0) , donc f(0)=0.

ii) On a 0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1) , donc f(-1)= - f(1)= -1

----

2) i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n : simple\ par\ récurrence.$

ii) $Soit\ m \in \mathbb{Z}^-,\ f(m) = m;\ en\ effet :$

$$f(m) = f((-1).(-m)) = \underbrace{f(-1)}_{=-1}.\underbrace{f(-m)}_{=-m\ car\ (-m)\in\mathbb{N}} = (-1).(-m) = m\ .$$

----

3) $Soit\ r \in \mathbb{Q}$, $Montrons\ que\ f(r) = r :$

Posons $r = \dfrac{p}{q}\ ; avec\ p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{N}^*.$

$$Alors\ f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p).f(\frac{1}{q}) = p.f(\frac{1}{q})$$

$$D'autre\ part,\ on\ a : \underbrace{f(1)}_{=1} = f\left(q.\frac{1}{q}\right) = \underbrace{f(q)}_{=q}.f\left(\frac{1}{q}\right),\ donc\ f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{p}{q} = r$$

----

4) I) $f(\varepsilon) = f\left(\sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\varepsilon}\right) = f\left(\sqrt{\varepsilon}\right).f\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = \left(f\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)^2 \geq 0\ .$

II) $Supposons\ x \leq y$, $et\ m.que\ f(x) \leq f(y)$:

$$On\ a\ f(y) = f((y-x)+x) = \underbrace{f(y-x)}_{\geq 0\ car\ y-x\geq 0} + f(x) \geq f(x)$$

----

5) I) On visera le théorème des gendarmes :

$Soit\ x \in \mathbb{R}.$

$Soit\ n \in \mathbb{N}^*, on\ a :$

$$E(nx) \leq nx \prec E(nx)+1 \Rightarrow \frac{E(nx)}{n} \leq x \prec \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{n} \prec \frac{E(nx)}{n} \leq x$$

$$Or\ \lim_{n\to+\infty} x - \frac{1}{n} = x\ et\ \lim_{n\to+\infty} x = x\ (c'est\ une\ suite\ constante)$$

Enfin, d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(nx)}{n} = x$.

----

5) II) Montrons que $f = id_{\mathbb{R}}$, $càd\ \left(\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x\ \right).$

$f = id_{\mathbb{R}}$, $càd\ \left(\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x\ \right)$

$Soit\ x \in \mathbb{R}.$

$Soit\ n \in \mathbb{N}^*,\ on\ a\ E(nx) \leq nx \prec E(nx)+1$

$$\Rightarrow \frac{E(nx)}{n} \leq x \prec \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{E(nx)}{n}+\frac{1}{n}\right) \ (car\ \ f\ \ est\ croissante)$$

ATTENTION ! L'inégalité n'est plus stricte car f n'est pas strictement croissante

$$Or\ \frac{E(nx)}{n}\ et\ \frac{E(nx)}{n}+\frac{1}{n}\ sont\ des\ nombres\ rationnels,\ alors \begin{cases} f\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = \frac{E(nx)}{n} \\ f\left(\frac{E(nx)}{n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{E(nx)}{n}+\frac{1}{n} \end{cases}$$

$$D'où \quad \frac{E(nx)}{n} \le f(x) \le \frac{E(nx)}{n}+\frac{1}{n}\ ,\ et\ ce\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}^*.$$

$$Gendarmes\ encore\ à\ nouveau\ et\ puisque\ \lim_{n\to+\infty}\frac{E(nx)}{n} = x\ donnne\ \lim_{n\to+\infty} f(x) = x$$

$$Or\ \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x)\ (suite\ constante)$$

$$Alors\ \ f(x) = x$$

<u>Exercice 12 :</u>

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, *montrons d'abord la* $1^{ère}$ *inégalité* : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \prec \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

l'autre inégalité se traitera de la même manière.

$$On\ a\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad car\ \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \succ 2\sqrt{n}$$

2) $E(S) = E\left(1+\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1+E\left(\sum_{k=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, *Calculons* $E\left(\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$:

$$On\ a:\ \forall\ 2\le n\le 10000,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{10000}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}_{=\sqrt{10001}-\sqrt{2}\ (téléscopie)} \prec \sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{2\sqrt{n}} \prec \underbrace{\sum_{n=2}^{10000}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}_{=\sqrt{10000}-\sqrt{1}=99\ (téléscopie)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10001}-\sqrt{2} \prec \sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}} \prec 99$$

$$\Rightarrow \underbrace{2\sqrt{10001}-2\sqrt{2}}_{\sim 197,18} \prec \sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}} \prec 198$$

$$\Rightarrow 197 \prec \sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}} \prec 198$$

$$\Rightarrow E\left(\sum_{n=2}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 197$$

$$Conclusion:\ E(S) = 198$$

<u>Exercice 13 :</u>

Il est conseillé de faire un schéma illustrant les intervalles pour prévoir l'intersection ou la réunion voulues. Après, on passe aux démonstrations.

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]=[0,1[$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}$, en effet :

1) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}$, en effet :

> **Rappels :**
>
> *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de parties d'un ensemble* E. *Soit* $x\in E$. *On a* :
>
> $$x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}/\ x\in A_n$$
>
> $$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}/\ x\in A_n$$

On a $\{0\}\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$ *car* : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\in\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$

L'autre inclusion $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[\subset\{0\}$:

Soit $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$, *alors* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n}\prec x\prec\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow x=0\ (\textit{par passage à la limite grace au thm gendarmes})$$

$$\Rightarrow x\in\{0\}.$$

2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]=[0,1[$, en effet :

L'inclusion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\subset[0,1[$:

$$x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*/\ x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$$

$$\Rightarrow x\in[0,1[$$

L'autre inclusion $[0,1[\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$:

Soit $x\in[0,1[$. *Montrons qu'il existe* $n\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

On a déjà que $x\geq 0$.

Il reste donc à montrer l'existence de $n\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $x\leq 1-\frac{1}{n}$.

On a $x\leq 1-\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{n}\leq 1-x\Leftrightarrow n\geq\frac{1}{1-x}$

et enfin l'entier naturel $n=E\left(\frac{1}{1-x}\right)+1$ *conviendra.*

Exercice 14 :

1) *Soient* $x, y \in [0,1]$, *montrons que* $(1-x)(1-y) \leq 1-xy$:

On a $(1-x)(1-y) \leq 1-xy \Leftrightarrow 1-x-y+xy \leq 1-xy$

$$\Leftrightarrow 2xy \leq x+y$$

Or $\begin{cases} x^2 \leq x \\ y^2 \leq y \end{cases}$ $(car\ x, y \in [0,1])$, *alors* $x^2+y^2 \leq x+y$

Alors pour montrer que $2xy \leq x+y$ *il suffit de vérifier que* $2xy \leq x^2+y^2$

ce qui est vrai car $x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0.$

2) Par récurrence, c'est plus simple grâce à **1), voyons *en bref* :**

Supposons $(1-x_1)...(1-x_n) \leq 1-x_1...x_n$.

Montrons $(1-x_1)...(1-x_{n+1}) \leq 1-x_1...x_{n+1}$:

On a $(1-x_1)...(1-x_{n+1}) = \underbrace{\left((1-x_1)...(1-x_n)\right)}_{\leq 1-x_1...x_n}.(1-x_{n+1}) \leq \underbrace{(1-x_1...x_n)(1-x_{n+1})}_{\leq 1-(x_1...x_n).x_{n+1}} \leq 1-x_1...x_{n+1}$

Exercice 15 :

1) *Soit* $x \geq 1$, *pour vérifier que* $f(x)$ *est bien définie, on vérifie que*

$$x-2\sqrt{x-1} \geq 0$$

On a $x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2 \geq 4(x-1)$ (*on a équivalence car les deux membres de l'inégalité sont positifs*)

$\Leftrightarrow x^2-4x+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$

ce qui est vrai

----

2) a) *Soit* $x \in [1,2]$, *on a* : **f(x)=2**, en effet :

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-4(x-1)} = 2$ (*en passant au carré et en simplifiant "les deux membres de l'égalité sont positifs"*)

$\Leftrightarrow x+\sqrt{(x-2)^2} = 2$

$\Leftrightarrow x+|x-2| = 2$

$\Leftrightarrow x+(2-x) = 2$ $(car\ x-2\ est\ négatif)$

ce qui est vrai

b) *Pour l'autre égalité, on procèdera de même.*

Exercice 16 :

1) *On montrera par récurrence sur* **n** *que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}^* / \begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3} \\ 3b_n^{\ 2} = a_n^{\ 2} - 1 \end{cases}$$

Initialisation : *Pour* $n=1$

On a $\left(2+\sqrt{3}\right)^1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$ *avec* $a_1 = 2$ *et* $b_1 = 1$

et on a $\begin{cases} 3b_1^{\ 2} = 3 \\ a_1^{\ 2} - 1 = 3 \end{cases}$, *donc* $3b_1^{\ 2} = a_1^{\ 2} - 1$

Hérédité : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *soient* $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$ *tels que* : $\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3} \\ 3b_n^{\ 2} = a_n^{\ 2} - 1 \end{cases}$

Montrons l'existence de $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ *tels que* : $\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3} \\ 3b_{n+1}^{\ 2} = a_{n+1}^{\ 2} - 1 \end{cases}$

On a $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n . \left(2+\sqrt{3}\right) = (a_n + b_n\sqrt{3})\left(2+\sqrt{3}\right) = \underbrace{\left(2a_n + 3b_n\right)}_{=a_{n+1} \in \mathbb{N}^*} + \underbrace{\left(a_n + 2b_n\right)}_{=b_{n+1} \in \mathbb{N}^*}\sqrt{3}$

reste à vérifier que : $3b_{n+1}^{\ 2} = a_{n+1}^{\ 2} - 1$, *on a* :

$$\begin{cases} 3b_{n+1}^{\ 2} = 3\left(a_n + 2b_n\right)^2 = 3a_n^{\ 2} + 12b_n^{\ 2} + 12a_nb_n \\ a_{n+1}^{\ 2} - 1 = \left(2a_n + 3b_n\right)^2 - 1 = 4a_n^{\ 2} + 9b_n^{\ 2} + 12a_nb_n - 1 \end{cases}$$

D'où $3b_{n+1}^{\ 2} = a_{n+1}^{\ 2} - 1 \Leftrightarrow 3a_n^{\ 2} + 12b_n^{\ 2} + 12a_nb_n = 4a_n^{\ 2} + 9b_n^{\ 2} + 12a_nb_n - 1$

$$\Leftrightarrow a_n^{\ 2} - 1 = 3b_n^{\ 2}$$

ce qui est vrai

<u>*Conclusion*</u> **:** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}^* / \begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3} \\ 3b_n^{\ 2} = a_n^{\ 2} - 1 \end{cases}$

----

2) $E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ *est un entier impaire , en effet* :

$E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ *est un entier impaire , en effet* :

On a $E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right) = E\left(a_n + b_n\sqrt{3}\right) = E\left(a_n + \sqrt{a_n^{\ 2} - 1}\right)$ (*car* $3b_n^{\ 2} = a_n^{\ 2} - 1$)

$= a_n + E\left(\sqrt{a_n^{\ 2} - 1}\right)$ (*car* a_n *est un entier*)

D'autre part, on tentera d'encadrer $\sqrt{a_n^{\ 2} - 1}$ *par deux entiers pour tirer la valeur de* $E\left(\sqrt{a_n^{\ 2} - 1}\right)$:

On a $\left(a_n - 1\right)^2 \le a_n^{\ 2} - 1 \le a_n^{\ 2}$ (*simple à vérifier*)

D'où en introduisant $\sqrt{\ }$ *on obtient* : $a_n - 1 \le \sqrt{a_n^{\ 2} - 1} \prec a_n$

$\Rightarrow E\left(\sqrt{a_n^{\ 2} - 1}\right) = a_n - 1$

D'où enfin $E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right) = 2a_n - 1$ *qui est un entier impaire.*

Fin & bon courage ☺