Ensembles et applications
Correction :

Exercice 1 :

1) $\exists\ a>0\ ,\ \exists\ b\geq 0\ ,\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ na<b$.
Sa négation : $\forall a>0, \forall b\geq 0, \exists n\in\mathbb{N} / na\geq b$

2) $\forall x\in E,\ (x\in A \Rightarrow x\notin B)$.
Sa négation : $\exists x\in E / x\in A \ et\ x\in B$.

Rappel : $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\overline{p}\ \ ou\ \ q)\ \ et\ donc\ \left(\overline{p\Rightarrow q}\right)\Leftrightarrow\left(p\ \ et\ \ \overline{q}\right)$

Exercice 2 :

1) $\exists x\in\mathbb{R} / f(x)=0$
2) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=0$

Exercice 3 :

1) $A\setminus(B\cap C)=A\cap\overline{B\cap C}=A\cap\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\right)=\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\setminus C\right)$.

2) $\overline{A}\setminus\overline{B}=\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cap B=B\cap\overline{A}=B\setminus A$.

Exercice 4 :

1) $\begin{cases} A\cup C=A\cup B \\ A\cap C=A\cap B\end{cases}\Leftrightarrow B=C$. En effet :

On procédera par double implication :

$(\Leftarrow)$ Evidente

$(\Rightarrow)$ supposons que $\begin{cases} A\cup C=A\cup B \\ A\cap C=A\cap B\end{cases}$ et montrons que B=C.

$$\begin{aligned}
B&=B\cap\left(A\cup B\right)\ (car\ B\subset\left(A\cup B\right))\\
&=B\cap\left(A\cup C\right)\ (car\ A\cup B=A\cup C)\\
&=\left(B\cap A\right)\cup\left(B\cap C\right)\\
&=\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)\ (car\ B\cap A=A\cap C)\\
&=\left(C\cap A\right)\cup\left(C\cap B\right)\\
&=C\cap\left(A\cup B\right)\\
&=C\cap\left(A\cup C\right)\ (car\ A\cup B=A\cup C)\\
&=C\ \ (car\ C\subset\left(A\cup C\right))
\end{aligned}$$

---

2) $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$, en effet :

$(\Rightarrow)$ supposons que A=B et montrons que $A\cap B=A\cup B$.

On a $A\cap B=A\cap A=A\ \ et\ \ A\cup B=A\cup A=A,\ \ d'où\ \ A\cap B=A\cup B$.

$(\Leftarrow)$ supposons que $A\cap B=A\cup B$ et montrons que A=B.

On a $A\subset\left(A\cup B\right)=\left(A\cap B\right)\subset B,\ \ d'où\ \ A\subset B.$

de même on trouve $B\subset A.$

D'où A=B.

3) $A \cap C = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A \subset C$, en effet :

$(\Leftarrow)$ Supposons que $B \subset A \subset C$, càd $B \subset A \; et \; A \subset C$.

Montrons que $A \cap C = A \cup B$.

On a $A \cap C = A \; car \; A \subset C. \; Et \; on \; a \; A \cup B = A \; car \; B \subset A$.

$d'où \; A \cap C = A \cup B$.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $A \cap C = A \cup B$, et m.que $B \subset A \; et \; A \subset C$.

On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$,$d'où \; B \subset A$.

Et de même $A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$,$d'où \; A \subset C$.

Exercice 5 :

Etudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1) $f : [0,1] \to [-1,1]$; $f : x \mapsto x^2$.

a) f est injective, en effet :

$Soient \; x, x' \in [0,1] \; tels \; que \; f(x) = f(x'). \; Montrons \; que \; x = x'.$

$f(x) = f(x') \Rightarrow x^2 = x'^2$

$\Rightarrow x = x' \; (car \; x \; et \; x' \; sont \; positifs)$

b) f est non surjective, en effet :

$(-1) \in [-1,1]$ n'a pas d'antécédent par f car : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x^2 \neq -1$.

c) f est non bijective car f non surjective.

---

2) $g : [0, \pi] \to [-1,1]$; $g : x \to \sin x$.

a) g non injective car $g(0) = g(\pi) \quad (et \; 0 \neq \pi)$.

b) g est non surjective, en effet :

$(-1) \in [-1,1]$ n'a pas d'antécédent par g, en effet :

$\forall x \in [0,\pi]$, $g(x) = \sin x \geq 0$,

$donc \; \forall x \in [0,\pi]$, $g(x) \neq -1$

c) f est non bijective car f non injective.

---

3) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ ; h : z \mapsto |z|$.

a) h est non injective car $h(1) = h(-1)$.

b) h est surjective, en effet :

Soit $y \in \mathbb{R}^+$, $on \; a \; y = |y| = h(y)$.

D'où h est surjective.

c) h est non bijective car non injective.

Exercice 6 :

$f : E \to E$ une application telle que $fofof = f$.

f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective .

$(\Rightarrow)$ Supposons que f est injective, et m.que f est surjective .

$Soit \; y \in E. Montrons \; qu'il \; existe \; x \in E \; tel \; que \; y = f(x).$

$On \; a \; f(f(f(y))) = f(y) \quad (car \; fofof = f)$

$\Rightarrow f(f(y)) = y \; (car \; f \; injective)$

D'où f est surjective (le x ici est f(y)).

$(\Leftarrow)$ Supposons que f est surjective, et m.que f est injective.

Soient x,x' dans E tels que f(x)=f(x'). M.que x=x'.

$f \ surjective \Rightarrow \left(\exists a,a' \in E \ / \ f(a)=x \ \ et \ \ f(a')=x' \right)$

D'où f(f(a))=f(f(a')) (car f(x)=f(x'))

$\Rightarrow f(f(f(a)))=f(f(f(a')))$

$\Rightarrow \underbrace{f(a)}_{=x}=\underbrace{f(a')}_{=x'} \ (car \ \ fofof \ = \ f)$

$\Rightarrow x=x'$

<u>Exercice 7 :</u>

Soient $f:E\rightarrow F$ et $g:F\rightarrow G$ deux applications.

Montrons les implications suivantes :

1) $gof \ \ injective \Rightarrow f \ \ injective$:

Supposons que gof est injective et M.que f est injective.

Soient x,x' dans E tels que f(x)=f(x'). M.que x=x'.

$f(x)=f(x')\Rightarrow g(f(x))=g(f(x'))$

$\Rightarrow x=x' \ (car \ \ gof \ \ est \ injective \ )$

---

2) $gof \ \ surjective \Rightarrow g \ \ surjective$, en effet :

Supposons que gof est surjective et M.que g est surjective.

Soit $y\in G,$

On a $gof:E\rightarrow G$ est surjective, alors il existe $x\in E \ tel \ que \ (gof)(x)=y$.

$\Rightarrow y=g(f(x)).$

D'où g est surjective.

---

3) $(gof \ \ injective \ et \ f \ \ surjective)\Rightarrow g \ \ injective$

Supposons que $gof \ \ injective \ et \ f \ \ surjective$, et M.que $g \ \ injective$.

Soient x, x' dans F tels que g(x)=g(x'). M.que x=x'.

$f \ \ surjective \ \Rightarrow \exists a,a'\in E \, tels \ que \ \ f(a)=x \ et \ \ f(a')=x'.$

$\Rightarrow g(f(a))=g(f(a')) \ (car \ \ g(x)=g(x'))$

$\Rightarrow a=a' \ \ (gof \ \ injective)$

$\Rightarrow \underbrace{f(a)}_{=x}=\underbrace{f(a')}_{=x'}$

$\Rightarrow x=x'$

---

4) $(gof \ \ surjective \ et \, g \ \ injective)\Rightarrow f \ \ surjective$

Supposons que $gof \ \ surjective \ et \, g \ \ injective$, et M.que $f \ \ surjective$.

Soit $y\in F, \ M.qu'il \ existe \ s\in E \ tel \ que \ f(s)=y$.

$On \ a \ \ y\in F\Rightarrow g(y)\in G.$

$Or \ gof \ \ surjective \ alors \ il \ existe \ x\in E \ tel \ que \ (gof)(x)=g(y)$

$\Rightarrow f(x)=y \ \ (g \ \ injective)$

D'où f est surjective (le s ici est x)

Exercice 8 :

Soit $f : E \to F$ une application.

1°) a) Soit A une partie de E, montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Soit $x \in A,\ M.que\ x \in f^{-1}(f(A)).$

$On\ a:\ x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$

Ce qui est vrai car $x \in A$.

---

b) Soit B une partie de F, montrons que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

$Soit\ \ x \in f(f^{-1}(B)),\ M.que\ x \in B.$

$On\ a:\ x \in f(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists y \in f^{-1}(B)\ /\ x = f(y)$

$Et\ on\ a\ y \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(y) \in B$

$D'où\ x \in B$.

---

2) a) f est injective $\Leftrightarrow$ pour toute partie A de E, $A = f^{-1}(f(A))$. En effet :

$(\Rightarrow)$ Supposons que f est injective.

Soit $A \subset E,\ Mque\ A = f^{-1}(f(A)).$

Pour l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$, voir Exercice 8, 1)a).

Pour $f^{-1}(f(A)) \subset A$:

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, $Mque\ x \in A$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(A)) &\Rightarrow f(x) \in f(A) \\ &\Rightarrow \exists a \in A / f(x) = f(a) \\ &\Rightarrow x = a (f\ \ injective) \\ &\Rightarrow x \in A\ (car\ \ a \in A) \end{aligned}$$

$D'où\ \ f^{-1}(f(A)) \subset A.$

$(\Leftarrow)$ Supposons que pour toute partie A de E, on a $A = f^{-1}(f(A))$.

Et montrons que f est injective.

Soient x, x' dans E tels que f(x)=f(x'). M.que x=x'.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow f(x) \in \{f(x')\} \\ &\Rightarrow f(x) \in f(\{x'\}) \\ &\Rightarrow x \in \underbrace{f^{-1}(f(\{x'\}))}_{=\{x'\}}\ \ (Pour\ \ A = \{x'\}) \\ &\Rightarrow x \in \{x'\} \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

---

b) f est surjective $\Leftrightarrow$ pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$

$(\Rightarrow)$ Supposons que f est surjective.

M.que : $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

$Soit\ B \subset F$, $M.que\ \ f(f^{-1}(B)) = B$.

Pour l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$, voir 1)b).

Montrons l'autre inclusion : $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Soit alors $x \in B, M.que\ x \in f(f^{-1}(B))$.

$f\ \ surjective \Rightarrow \exists t \in E / x = f(t)$

$et\ \ x \in B \Rightarrow f(t) \in B$

$\Rightarrow t \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow \underbrace{f(t)}_{=x} \in f\left(f^{-1}(B)\right)$

$\Rightarrow x \in f\left(f^{-1}(B)\right)$

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$. Montrons que f est surjective.

Pour B=F, on a $f(f^{-1}(F)) = F$.

$f^{-1}(F) = E\ \ alors\ \ f(E) = F$. Ce qui traduit que f est surjective.

<u>Exercice 9 :</u> (La solution en bref)

Soit $f : E \to F$ une application.

1) a) $\forall A, A' \in \wp(E)$, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$. En effet.

$i)\ \ f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$:

$A \subset (A \cup A') \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup A')$

$A' \subset (A \cup A') \Rightarrow f(A') \subset f(A \cup A')$

$D'où\ \ f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A').$

$ii)\ \ f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$:

$y \in f(A \cup A') \Rightarrow \exists x \in A \cup A' / y = f(x)$

$x \in A \cup A' \Rightarrow x \in A\ \ ou\ \ x \in A'$

$\Rightarrow f(x) \in f(A)\ \ ou\ \ f(x) \in f(A')$

$D'où\ \ \ y \in f(A)\ \ ou\ \ y \in f(A'),\ càd\ \ y \in f(A) \cup f(A')$

---

b) $\forall A, A' \in \wp(E)$, $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. En effet.

$\left(A \cap A'\right) \subset A \Rightarrow f\left(A \cap A'\right) \subset f(A)$

$\left(A \cap A'\right) \subset A' \Rightarrow f\left(A \cap A'\right) \subset f(A')$

$D'où\ \ f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

<u>*L'inclusion peut être stricte*</u>

<u>Exemple</u> :

Prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. $A = \left[-1,0\right]$, $A' = \left[0,1\right]$.

On a $f\left(A \cap A'\right) = \left\{0\right\}\ et\ \ f(A) \cap f(A') = [0,1]\ (car\ \ f(A) = f(A') = [0,1])$.

---

2) a) $\forall B \subset F, \quad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$, en effet :

$x \in f^{-1}(B \cup B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cup B'$

$\Leftrightarrow f(x) \in B\ \ ou\ \ f(x) \in B'$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)\ ou\ x \in f^{-1}(B')$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

---

2)b) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
Calquée sur 2)a).

---

2) c) $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$. Procédons par équivalence pour montrer cette égalité :

$x \in f^{-1}\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow f(x) \notin B$

$D'autre\ part : f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$

$D'où \qquad f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B)$

$Ainsi : x \in f^{-1}\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B)$

Exercice 10 :

Soit $f : E \to F$ une application.

1°) f est injective $\Leftrightarrow \forall A, A' \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$. En effet :

CN (Condition nécessaire) (càd l'implication directe $\Rightarrow$) :

$Soient\ A, A' \in \mathcal{P}(E),\ M.que\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$:

$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ est déjà montrée (voir Ex 9. 1)b))

$f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$: en effet . Soit $x \in E$.

$x \in f(A) \cap f(A') \Rightarrow \exists (a, a') \in A \times A' \,/\, x = f(a)\ et\ x = f(a')$

$\Rightarrow f(a) = f(a')$

$\Rightarrow a = a'\ \ (f\ \ injective)$

$\Rightarrow a \in A \cap A'$

$\Rightarrow \overbrace{f(a)}^{=x} \in f(A \cap A')$

$\Rightarrow x \in f(A \cap A')$

D'où $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$.

CS (Condition suffisante) (càd l'implication inverse $\Leftarrow$) :

Supposons que : $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

M.que f est injective.

Supposons que f(x)=f(x'), et m.que x=x'.

Prenons A={x} et A'={x'}. On a f(A)={f(x)} et f(A')=f(x')}. On a aussi :

$f(x) = f(x') \Rightarrow f(A) = f(A') = \{f(x)\}$

$\Rightarrow f(A) \cap f(A') = \{f(x)\}$

$\Rightarrow f(A \cap A') = \{f(x)\}\ \left(car\ \ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')\right)$

$\Rightarrow A \cap A' \neq \emptyset\ \left(car\ \ f(\emptyset) = \emptyset\right)$

$\Rightarrow \{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow x = x'\ \left(car\ \ si\ x \neq x'\ alors\ \{x\} \cap \{x'\} = \emptyset\right)$

2°) f est bijective $\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, en effet :

$(\Rightarrow)$

Supposons que f est bijective.

$Soit\ A \in \mathcal{P}(E),\ M.que\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$: Procédons par double inclusion .

→ $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$:

Soit $y \in f(\overline{A})\ m.que\ y \in \overline{f(A)}$, $càd\ que\ y \notin f(A)$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $y \in f(A)$.

Alors $\exists a \in A / y = f(a)$.

Or $y \in f\left(\overline{A}\right), alors\ il\ existe\ x \in \overline{A}\ tel\ que\ y = f(x)$.

$\Rightarrow f(a) = f(x)$

$\Rightarrow x = a\ (f\ \ injective\ )$

$\Rightarrow x \in A\ et\ x \notin A\ (car\ a \in A\ et\ x \in \overline{A}\ )$

Ce qui est absurde, d'où $y \in \overline{f(A)}$.

→ $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$:

$Soit\ y \in \overline{f(A)},\ M.que\ y \in f(\overline{A})$:

On a $y \notin f(A)$.

D'autre part : f surjective $\Rightarrow \exists x \in E / y = f(x)$

Alors $x \notin A$; car sinon, on aura $y = f(x) \in f(A)$, mais $y \notin f(A)$.

D'où $x \notin A$, $c.à.d\ x \in \overline{A}$.

$\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{=y} \in f(\overline{A})$

$\Rightarrow y \in f(\overline{A})\ \ \left(CQFD\ "ce\ qu'il\ \ fallait\ démontrer"\right)$

$(\Leftarrow)$

Supposons que : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, et montrons que f est bijective :

a) f surjective , en effet :

$$\begin{aligned} f(E) &= f(\overline{\varnothing}) \\ &= \overline{f(\varnothing)}\ \ (A\ ici\ est\ \varnothing) \\ &= \overline{\varnothing}\ (f(\varnothing) = \varnothing) \\ &= F \end{aligned}$$

$D'où\ \ f\ \ est\ surjective$

---

b) f est injective, en effet :

Soient x , x' $\in E$ tels que x≠x', montrons que f(x) $\neq$ f(x').

$On\ \ a\ \ f\left(\overline{\{x\}}\right) = \overline{f\left(\{x\}\right)}\ \ \left(A\ ici\ est\ \{x\}\right)$

$\Rightarrow f\left(\overline{\{x\}}\right) = \overline{\{f(x)\}}\ \ \left(car\ \ f\left(\{x\}\right) = \{f(x)\}\right)$

Et on a $x \neq x' \Rightarrow x' \notin \{x\}$.

$\Rightarrow x' \in \overline{\{x\}}$

$\Rightarrow f(x') \in \underbrace{f\left(\overline{\{x\}}\right)}_{=\overline{\{f(x)\}}}$

$\Rightarrow f(x') \in \overline{\{f(x)\}}$

$\Rightarrow f(x') \neq f(x)$, *CQFD*

Exercice 11 :

Soient A et B deux parties de E.

1) Montrons que $\chi_{A\cap B} = \chi_A . \chi_B$, *càd* $\forall x \in E$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\ \chi_B(x)$:

Cas 1 : *Si* $x \in A \cap B$:

$\Rightarrow \chi_{A\cap B}(x) = 1.$

et on a $\chi_A(x) = 1$ *et* $\chi_B(x) = 1$ *car* $x \in A$ *et* $x \in B.$

$\Rightarrow \chi_A(x).\ \chi_B(x) = 1$

D'où l'égalité voulue.

Cas 2 : *Si* $x \notin A \cap B$: (càd $x \notin A$ *ou* $x \notin B$.)

$\Rightarrow \chi_{A\cap B}(x) = 0.$

et on a $\chi_A(x) = 0$ *ou* $\chi_B(x) = 0$ *car* $x \notin A$ *ou* $x \notin B.$

$\Rightarrow \chi_A(x).\ \chi_B(x) = 0$

D'où l'égalité voulue.

---

2) Supposons que $A \cap B = \emptyset$,et montrons que $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

Soit $x \in E$. M.que $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$

Cas 1 : *Si* $x \in A \cup B$

$\Rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = 1.$

D'autre part, on a $x \in A$ *ou* $x \in B$

Si $x \in A$:

alors $x \notin B$ *car* $A \cap B = \emptyset.$

$\Rightarrow \chi_A(x) = 1$ *et* $\chi_B(x) = 0$

$\Rightarrow \chi_A(x) +\ \chi_B(x) = 1$

D'où $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$

Si $x \in B$: On procède de même.

Cas 2 : *Si* $x \notin A \cup B$ (*càd* $x \notin A$ *et* $x \notin B$)

$\Rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = 0.$

D'autre part, on a $x \notin A$ *et* $x \notin B$

$\Rightarrow \chi_A(x) = 0$ *et* $\chi_B(x) = 0$

$\Rightarrow \chi_A(x) +\ \chi_B(x) = 0$

D'où $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}\setminus\{1\},\ z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$.

1°) Montrons que f est bijective :

Càd : $\forall y \in \mathbb{C}\setminus\{1\}, \exists! z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}\ tel\ que\ y = f(z)$

Soient $y \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ *et* $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ *,on a* :

$$y = f(z) \Leftrightarrow y = \frac{z+i}{z-i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{i(y+1)}{y-1}$$

D'où f est bijective , et que : $\forall y \in y \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{i(y+1)}{y-1}$

---

2)a) $f(\mathbb{R}) = U\setminus\{1\}$, *où* $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$.

→ La 1ère inclusion : $f(\mathbb{R}) \subset U\setminus\{1\}$

On a $f(\mathbb{R}) = \left\{\dfrac{x+i}{x-i} \ /\ x \in \mathbb{R}\right\}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{x+i}{x-i} \neq 1\ et\ \left|\dfrac{x+i}{x-i}\right| = 1$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) \subset U\setminus\{1\}$.

→ La 2ème inclusion : $U\setminus\{1\} \subset f(\mathbb{R})$

Soit $z \in U\setminus\{1\}$, *M.qu'il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = f(x)$ (*càq* $z \in f(\mathbb{R})$) :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = e^{i\theta}$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a* :

$$f(x) = z \Leftrightarrow \frac{x+i}{x-i} = e^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{i(e^{i\theta}+1)}{e^{i\theta}-1} (après\ calculs)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} \quad (règle\ de\ l'angle-moitié)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

D'où l'existence d'un réel x , qui est $\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, tel que f(x)=z.

Conclusion : $f(\mathbb{R}) = U\setminus\{1\}$.

---

2)b) $f\left((i\mathbb{R})\setminus\{i\}\right) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.En effet :

$(i\mathbb{R})\setminus\{i\}=\{ix/x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\}$

Alors $f\left((i\mathbb{R})\setminus\{i\}\right)=\{f(xi)/x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\}=\left\{\frac{ix+i}{ix-i}/x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\right\}=\left\{\frac{x+1}{x-1}/x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\right\}$

La fonction homographique $f:x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

D'où $\left\{\frac{x+1}{x-1}/x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\right\}=\{f(x)/x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Enfin, $f\left((i\mathbb{R})\setminus\{i\}\right)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Exercice 13 :

Soit $\Re$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x,y)\Re(x_0,y_0)\Leftrightarrow|x-x_0|\le y-y_0$

Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre :

1°) $\Re$ *est réflexive :*

On a $(x,y)\Re(x,y)\Leftrightarrow|x-x|\le y-y\Leftrightarrow 0\le 0$, ce qui est vrai

D'où $\Re$ *est réflexive .*

2°) $\Re$ *est antisymétrique :*

Supposons que $(x,y)\Re(x',y')$ *et* $(x',y')\Re(x,y)$ *et M.que* $(x,y)=(x',y')$.

On a $|x-x'|\le y-y'$ *et* $|x'-x|\le y'-y$

$\Rightarrow\ 0\le y-y'$ *et* $\le y'-y$

$\Rightarrow\ 0\le y-y'$ *et* $y-y'\le 0$

$\Rightarrow\ y-y'=0$

$\Rightarrow y=y'$

et $|x-x'|\le y-y'$ *devient* $|x-x'|\le 0$

$\Rightarrow x=x'$

D'où $(x,y)=(x',y')$

3°) $\Re$ *est transitive :*

Supposons que $(x,y)\Re(x',y')$ *et* $(x',y')\Re(x'',y'')$ *et M.que* $(x,y)\Re(x'',y'')$:

On a $\begin{cases}|x-x'|\le y-y'\\|x'-x''|\le y'-y''\end{cases}$

$\Rightarrow|x-x'|+|x'-x''|\le y-y''$ (*par sommation*)

Or $|x-x''|=|(x-x')+(x'-x'')|\le|x-x'|+|x'-x''|$ (*l'inégalité triangulaire*)

D'où $|x-x''|\le y-y''$, *càd* $(x,y)\Re(x'',y'')$. *CQFD*

Conclusion ***:*** $\Re$ *est une relation d'ordre .*

Exercice 14 : (**en bref**)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation : $(x,y)\Re(x',y')\Leftrightarrow x\le x'$ *et* $y\le y'$

1°) Vérifions que $\Re$ *est une relation d'ordre :*

→ $\Re$ est réflexive : car $x\le x'$ *et* $y\le y$

→ $\Re$ *est antisymétrique :*

$$\begin{cases} x \le x' \\ y \le y' \end{cases} et \begin{cases} x' \le x \\ y' \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

→ $\Re$ *est transitive :*

$$\begin{cases} x \le x' \\ y \le y' \end{cases} et \begin{cases} x' \le x'' \\ y' \le y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le x'' \\ y \le y'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y) \Re (x'',y'')$$

2°) L'ordre $\Re$ est partiel :

Considérez les deux couples (1,2) et (3,1) :

Exercice 15 : (**en bref**)

On munit $\mathbb{N}^*$ de la relation $\Re$ définie par : $p \Re q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n$

Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre :

→ $\Re$ est réflexive :

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $p \Re p$, car $p = p^1$

→ $\Re$ est antisymétrique :

Supposons $p \Re q$ *et* $q \Re p$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n \\ \exists m \in \mathbb{N}^*, p = q^m \end{cases}$$

$$\Rightarrow p \text{ divise } q \text{ et } q \text{ divise } p$$

$$\Rightarrow p = q \ (\text{résultat classique d'arithmétique})$$

→ $\Re$ est transitive :

Supposons $p \Re q$ *et* $q \Re r$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n \\ \exists m \in \mathbb{N}^*, r = q^m \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = (p^n)^m = p^{mn}$$

$$\Rightarrow p \Re r$$

Fin