CONCOURS NATIONAL MAROCAIN - Session 2016
Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

Problème : 1

Partie I

1. (a) *D'après la formule de Binôme de Newton, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1.$$

(b) *Soit $x \in [0,1]$, on a $0 \leq B_{n,k}(x) \leq \sum_{j=0}^{n} B_{n,j} = 1$.*

2. *On a, pour tout $k \in [\![1\ ,\ n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et pour tout $k \in [\![2\ ,\ n]\!]$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Donc :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} kB_{n,k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} \\
&= nX\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k(1-X)^{n-1-k} \\
&= nX
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^{n} kB_{n,k} \\
&= n\sum_{k=2}^{n} (k-1)\binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} X^k(1-X)^{n-k} \\
&= n(n-1)X^2\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^k(1-X)^{n-2-k} \\
&= n(n-1)X^2
\end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX((n-1)X+1).$$

3. (a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0\ ,\ n]\!]$.*
   - *Si $k = 0$, $B_{n,0} = (1-X)^n$ et donc $B'_{n,0} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$.*
   - *Si $k = n$, $B_{n,n} = X^n$ et donc $B'_{n,n} = nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}$.*
   - *Si $k \in [\![1\ ,\ n-1]\!]$ et comme $(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-1-k} = n\binom{n-1}{k}$, alors :*

$$B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}).$$

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.*

$$\begin{aligned}
(P_n(f))'(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B'_{n,k}(x) \\
&= -nf(0)B_{n-1,0}(x) + nf(1)B_{n-1,n-1}(x) + n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)(B_{n-1,k-1}(x) - B_{n-1,k}(x)) \\
&= -nf(0)B_{n-1,0}(x) + nf(1)B_{n-1,n-1}(x) + n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k}(x) - n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k}(x) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k}(x) - n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k}(x) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n-1,k}(x)
\end{aligned}$$

(c) *On suppose que f est coissante sur [0,1]. Soit $x \in [0,1]$. On a, pour tout $k \in [\![0\ ,\ n-1]\!]$, $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0$ et donc $(P_n(f))'(x) \geq 0$. D'où $P_n(f)$ est croissante sur [0,1].*

4. (a) *Soit $x \in [0,1]$.*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) &= x^2\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - 2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) \\
&= x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2 + x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

(b) *Démontrons le résultat par l'absurde. Supposons, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_n, y_n) \in [0,1]^2,\ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $[0,1]^2$ est un compact, alors, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_n$ de $((x_n, y_n))_n$ convergeant vers $(x,y) \in [0,1]^2$.*
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$, donc, par passage à la limite, on a $x = y$.
Et $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \frac{\varepsilon}{2}$ contrdit le fait que f est continue.

(c) i. *On a, pour tout $k \in A$, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc :*

$$\sum_{k\in A}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k} \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A} B_{n,k} \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

ii.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k} &\leq 2M\sum_{k\in B} B_{n,k} \\
&\leq \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k\in B}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} \text{ car } \forall k \in B,\ \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2} \geq 1 \\
&\leq \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} \\
&\leq \frac{2M}{n\alpha^2} x(1-x) \text{ d'après I.4.a} \\
&\leq \frac{M}{2n\alpha^2} x(1-x) \text{ car } \forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(d) *Soit $x \in [0,1]$. Comme (A,B) est une partition de $[\![0\ ,\ n]\!]$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)$ (d'après I.1.a) et donc,* *d'après I.4.c.i et I.4.c.ii*

$$\begin{aligned}
|P_n(f)(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k} \\
&\leq \sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}+\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

(e) *Comme* $\dfrac{M}{2n\alpha^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$*, donc* $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Longrightarrow\dfrac{M}{2n\alpha^2}\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$
$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\ n\geq N\Longrightarrow|P_n(f)(x)-f(x)|\leq\varepsilon$*. D'où* $(P_n(f))_{n\geq1}$ *converge uniformément vers f sur [0,1].*

5. *Considérons* $\varphi:\begin{array}{ccc}[a,b]&\longrightarrow&[0,1]\\ x&\longmapsto&\dfrac{x-a}{b-a}\end{array}$ *, il est clair que* φ *est une bijection continue et* $\varphi^{-1}:\begin{array}{ccc}[0,1]&\longrightarrow&[a,b]\\ x&\longmapsto&(1-x)a+xb\end{array}$
Posons $f=g\circ\varphi^{-1}$ *qui est continue sur [0,1]. Donc elle est limite uniforme de* $(P_n(f))_{n\geq1}$ *sur [0,1].*
Posons : $\forall n\geq1,\ \forall x\in[a,b],\ Q_n(g)(x)=P_n(f(x))(\varphi(x))$ *(est une fonction polynômiale). Alors* $\forall x\in[a,b]$

$$|g(x)-Q_n(g)(x)|=|(f-P_n(f))(\varphi(x))|\leq\|f-P_n(f)\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

c-à-d $(Q_n(g))_n$ *converge uniformément vers g sur [a,b].*

Partie II

1. (a) *Puisque* S_n *suit la loi binomiale de paramètres n et x, alors* $S_n(\Omega)=[\![0\ ,\ n]\!]$ *et* $\forall k\in[\![0\ ,\ n]\!],\ P(S_n=k)=B_{n,k}(x)$.
Donc

$$E(S_n)=\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}(x)=nx\ \text{ et } V(S_n)=E(S_n^2)-(E(S_n))^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}B_{n,k}(x)-n^2x^2=nx(1-x).$$

Donc $E(X_n)=x$ *et* $V(X_n)=\dfrac{1}{n^2}V(S_n)=\dfrac{x(1-x)}{n}$.

(b) *Soit* $\delta>0$*. On a d'apèes l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,*

$$P(|X_n-x|\geq\delta)\leq\frac{V(X_n)}{\delta^2}=\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\leq\frac{1}{4n\delta^2}.$$

2. (a) *D'après le théorème de transfert,*

$$C_n(f)(x)=E(f(X_n))=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)=P_n(f)(x)$$

Donc $C_n(f)$ *est polynomiale sur [0,1].*

(b) i. *Puisque, pour tout* $k\in[\![0\ ,\ n]\!]$*, on a* $P\left(X=\dfrac{k}{n}\right)=P(S_n=k)=B_{n,k}(x)$*, alors d'après la question I.4.c.i on a le résultat.*

ii. *Pour tout* $k\in[\![0\ ,\ n]\!]$ *tel que* $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|>\beta$*, on a* $\left(X_n=\dfrac{k}{n}\right)=(|X_n-x|>\beta)$ *et donc, d'après II.1.b,* $P\left(X_n=\dfrac{k}{n}\right)\leq\dfrac{1}{4n\beta^2}$*. D'où*

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\beta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\leq\frac{M}{2n\beta^2}.$$

(c) *On procède comme dans I.4.d et I.4.e pour conclure que* $(C_n(f))_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers f sur [0,1].*

Partie III

1. (a) *Par linéarité de l'intégrale, on a :* $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \displaystyle\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$. *Or d'après le théorème de Stone-Weierstrass f est limite uniforme d'une suite de polynômes réels* $(P_n)_n$ *sur [a,b]. Et on a*

$$\forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N},\ |f^2(x) - f(x)P_n(x)| = |f(x)||f(x) - P_n(x)| \leq \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $(fP_n)_n$ *converge uniformément vers* f^2 *sur [a,b].*
D'après le théorème d'interversion limite-intégrale, $0 = \displaystyle\int_a^b f(x)P_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f^2(x)dx$. *Donc* $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 0$.
Or f^2 *est positive et continue sur [a,b], donc* f^2 *est nulle sur [a,b]. D'où f est nulle sur [a,b].*

(b) *La fonction* $x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *car elle y est continue et* $|x^n e^{-(1-i)x}| = x^n e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *au voisinage de* $+\infty$. *Et, par intégration par partie, on a* $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{1-i} I_n$. *D'où, par récurrence sur n, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{n!}{(1-i)^n} I_0 = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}.$$

(c) *Soit* $\phi : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\sqrt[4]{x}} \sin(\sqrt[4]{x}) \end{array}$. ϕ *est continue et non nulle sur* $[0,+\infty[$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *En utilisant le changement de variable* $y = \sqrt[4]{x}$ *et la question III.1.b,*

$$\int_0^{+\infty} x^n \phi(x)dx = 4\int_0^{+\infty} y^{4n+3} e^{-y} \sin(y)dy = 4Im(I_{4n+3}) = 0$$

Commentaire *: cette question nous permet de conclure que la généralisation de III.1.a n'est pas vrai sur un intervalle quelconque.*

2. *D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite* $(Q_n)_n$ *de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers g.*
On a alors $\displaystyle\int_a^b Q_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g(t)dt$.
Posons $P_n(t) = Q_n(t) - \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b Q_n(x)dx$ *et donc* $(P_n)_n$ *est une suite de polynômes convergeant uniformément vers g sur [a,b] vérifiant* $\displaystyle\int_a^b P_n(t)dt = 0$.

3. *Comme* φ' *est continue sur I, alors il existe une suite* (Q_n) *de fonctions polynomiales convegeant uniformément vers* φ' *sur I.*
Posons alors $P_n(x) = \varphi(a) + \displaystyle\int_a^x Q_n(t)dt$. *L'inégalité* $|P_n(x) - \varphi(x)| \leq \displaystyle\int_a^x |\varphi'(t) - Q_n(t)|dt$ *permet d'établir que* $(P_n)_n$ *converge uniformément vers* φ *sur I. Et puisque* $P_n' = Q_n$, *la suite* $(P_n)_n$ *convient.*

4. *il existe une suite* (Q_n) *de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers* ψ *sur I. Posons* $m_n = \inf\limits_{t\in I} Q_n(t)$ *et* $m = \inf\limits_{t\in I} \psi(t)$. *Or* Q_n *et* ψ *sont continues sur le segment I, donc il existe* $t_n,\ t' \in [a,b]$ *tel que* $m_n = Q_n(t_n)$ *et* $m = \psi(t')$. *Montrons que* $m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m \geq 0$. *Soit* $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \forall t \in I, |\psi(t) - Q_n(t)| < \varepsilon$, *donc* $\forall n \geq N\ m_n = Q_n(t_n) > \psi(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$ *et* $m = \psi(t') > Q_n(t') - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon$ *donc* $\forall n \geq N\ |m_n - m| < \varepsilon$.
Ainsi $m_n \to m$.
La suite $(P_n = Q_n - m_n + m)$ *convient.*